LA

STATIQUE GRAPHIQUE

ET SES

APPLICATIONS AUX CONSTRUCTIONS.

LA

STATIQUE GRAPHIQUE

ET SES

APPLICATIONS AUX CONSTRUCTIONS;

PAR

M. MAURICE LÉVY,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES,
PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE ET A L'ÉCOLE CENTRALE
DES ARTS ET MANUFACTURES.

DEUXIÈME ÉDITION.

IV[e] PARTIE.

OUVRAGES EN MAÇONNERIE.
SYSTÈMES RÉTICULAIRES A LIGNES SURABONDANTES.
INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES CONTENUES
DANS LES QUATRE PARTIES.

TEXTE. IV

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1888

TABLE DES MATIÈRES

DE LA QUATRIÈME PARTIE.

PREMIÈRE SECTION.

VOUTES EN BERCEAU ET COUPOLES EN MAÇONNERIE.

CHAPITRE I.

CHAPITRE II.

DEUXIÈME SECTION.

POUSSÉE DES TERRES ET DES FLUIDES. MURS DE SOUTÈNEMENT.

CHAPITRE III.

CHAPITRE IV.

CHAPITRE V.

TROISIÈME SECTION.

SYSTÈMES RÉTICULAIRES A LIGNES OU CONDITIONS SURABONDANTES.

CHAPITRE VI.

CHAPITRE VII.

CHAPITRE VIII.

CHAPITRE IX.

NOTES.

NOTE I.

APPENDICE A LA NOTE I.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

ERRATA.

Page 135, § 621. Dans le titre du paragraphe, *au lieu de :* allongements, *lisez* des déplacements.

LA

STATIQUE GRAPHIQUE

ET SES

APPLICATIONS AUX CONSTRUCTIONS.

QUATRIÈME PARTIE.

PREMIÈRE SECTION.

VOUTES EN BERCEAU ET COUPOLES EN MAÇONNERIE.

CHAPITRE I.

VOUTES EN BERCEAU.

§ 552.

CONDITIONS DE STABILITÉ D'UNE VOUTE. — Soient (*fig.* 1, p. 2) ASC l'intrados, BHD l'extrados d'une voûte cylindrique chargée uniformément dans le sens de sa longueur, de sorte qu'il suffit d'en considérer une longueur égale à l'unité.

Dans le sens de la section droite elle porte, outre son propre poids, une surcharge formée en partie d'un massif de maçonnerie non appareillé et d'un remblai ou, s'il s'agit d'un pont-canal, de la cunette du canal avec l'eau qui la remplit.

Nous admettrons, comme on le fait d'habitude, que chaque voussoir, tel que *abcd*, porte la charge *dbd'b'* qui la surmonte directement. Cette hypothèse, quand il s'agit d'un remblai, n'est pas exacte; mais elle paraît défavorable à la stabilité de la voûte.

puisqu'elle revient à négliger le frottement qui se produit le long des sections verticales dd' et bb', frottement qui serait de nature

Fig. 1.

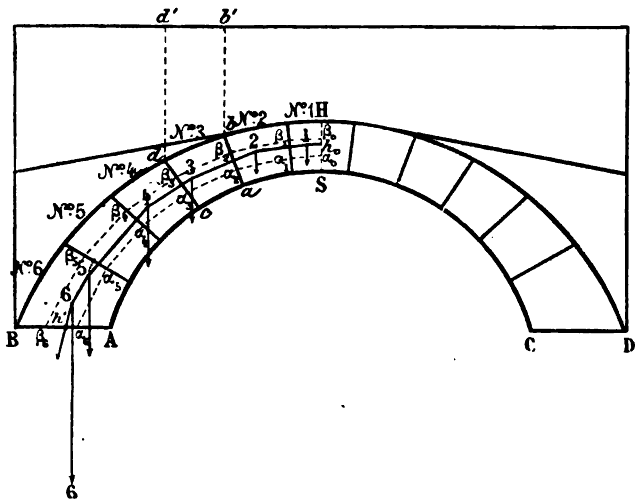


Fig. 1 *bis*.

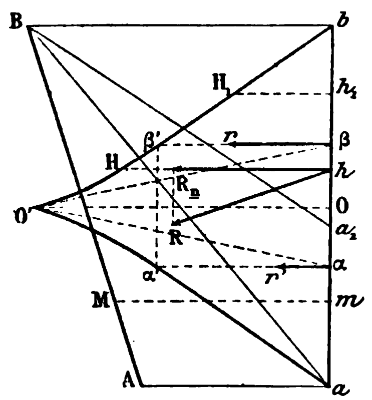
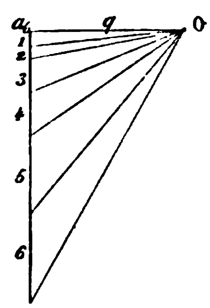


Fig. 1 *ter*.



à soulager un peu la voûte. A ce point de vue, elle semble donc admissible (¹).

Nous ferons abstraction de la cohésion produite entre les vous-

(¹) *Voir* plus loin § 583.

soirs par le mortier qui les relie et nous poserons en principe que, dans ces conditions, la stabilité d'une voûte se trouvera convenablement assurée par les conditions suivantes :

1° Qu'aucun joint ne tende à s'ouvrir, c'est-à-dire que les joints soient comprimés sur toute leur longueur;

2° Que les voussoirs ne puissent pas glisser les uns par rapport aux autres;

3° Que la pression par unité de surface, exercée en un point quelconque d'un joint, ne dépasse pas une valeur donnée p_0 dépendant de la nature des matériaux employés.

Théorème. — *Pour qu'une voûte soit stable,* dans le sens qui vient d'être attribué à ce mot, il faut et il suffit :

1° *Que le centre de pression de chaque joint ab* (*fig.* 1 *bis*, p. 2, où le joint *ab* est représenté amplifié), *c'est-à-dire le point h où il est rencontré par la résultante* R *des pressions qu'il supporte, soit placé dans le tiers moyen de sa longueur;*

2° *Que la force* R *fasse, avec la normale au joint, un angle moindre ou au plus égal à l'angle du frottement de la pierre employée sur elle-même;*

3° *Que la composante normale* R_n *de la force* R *étant multipliée par le facteur numérique*

$$1+\frac{6\xi}{e},$$

où $e = ab$ *est la longueur du joint et* $\xi = hO$ *la distance du centre de pression au milieu du joint, et la force ainsi amplifiée,*

$$R_n\left(1+\frac{6\xi}{e}\right),$$

étant supposée uniformément répartie sur la longueur du joint, la pression par unité de surface

$$\frac{R_n}{e}\left(1+\frac{6\xi}{e}\right),$$

qui en résulte, soit moindre ou au plus égale à celle p_0 *qu'on ne veut pas dépasser.*

En effet, soit (*fig.* 1 *bis*) $ab = e$ un joint représenté à part, à une échelle plus grande.

Divisons-le en trois parties égales; soient β et α les points de division et soit O le milieu du joint.

Supposons, pour fixer les idées, que la résultante R des pressions soit appliquée en un point h placé entre O et b.

En chaque point m, menons une ordonnée mM qui, à une échelle convenue, représente la composante normale de la pression par unité de surface qui s'exerce au point m; le lieu des extrémités de ces ordonnées sera une courbe que, comme dans toute la Résistance des matériaux, nous remplaçons approximativement par une droite AB (loi du trapèze).

La composante normale R_n de R sera égale à l'aire du trapèze ABab et le centre de pression h sera la projection sur ab du centre de gravité de cette aire.

La plus grande pression se trouvera à l'extrémité du joint, la plus voisine du centre de pression, ici à l'extrémité b, et sera représentée par l'ordonnée correspondante Bb; la plus petite sera à l'extrémité opposée, ici en a, et représentée par l'ordonnée Aa.

Pour que le joint soit partout comprimé, il faut et il suffit que les deux ordonnées Aa, Bb tombent du même côté de ab; à la limite, la plus petite peut être nulle : dans ce cas, le trapèze se réduit à un triangle.

Décomposons le trapèze en deux triangles Bba, BAa par la diagonale Ba.

Les ordonnées du premier de ces triangles fournissent une résultante r égale à son aire et appliquée en β; les ordonnées du second fournissent, de même, une résultante r' égale à son aire et appliquée en α. Les deux forces r et r' (dont la dernière peut à la limite être nulle) étant, par hypothèse, de même sens, leur résultante R_n est nécessairement comprise entre elles, ce qui établit la partie 1° de la proposition énoncée.

La partie 2° résulte des lois connues du frottement (§ 182).

Pour établir la partie 3°, prenons les moments des deux forces r et r' et de leur résultante R_n par rapport au point α; nous aurons

$$R_n \times h\alpha = r \times \beta\alpha$$

ou, en posant $hO = \xi$,

$$R_n\left(\frac{e}{6} + \xi\right) = r \times \frac{e}{3};$$

et, puisque r est l'aire du triangle $B\,ba$, soit

$$r = Bb \times \frac{e}{2};$$

on a

$$R_n\left(\frac{e}{6} + \xi\right) = Bb \times \frac{e^2}{6},$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{R_n\left(1 + \frac{6\xi}{e}\right)}{e} = Bb.$$

Donc, pour que la pression maxima Bb, qui se produit dans le joint, soit égale ou inférieure à p_0, il faut et il suffit que

$$(2) \qquad \frac{R_n\left(1 + \frac{6\xi}{e}\right)}{e} \leqq p_0.$$

Dans le cas où la pression dans un joint atteint sa valeur limite, l'inégalité se change en égalité et l'on a

$$(2') \qquad Bb = \frac{R'_n}{e}\left(1 + \frac{6\xi}{e}\right) = p_0,$$

en désignant par R'_n la limite supérieure de R_n.

§ 553.

REPRÉSENTATION DE M. DURAND-CLAYE DES VALEURS-LIMITE DE R_n. — L'inégalité (2) et l'égalité (2′) supposent essentiellement le centre de pression h compris dans le sixième $O\beta$ du joint. Pour chaque valeur de ξ, c'est-à-dire pour chaque position du centre de pression ainsi placé, l'équation (2′) fournit la valeur-limite R'_n de la pression normale correspondante R_n, c'est-à-dire celle pour laquelle la pression maxima par unité de surface est $Bb = p_0$.

Au lieu de compter les abscisses $Oh = \xi$ à partir du milieu du joint, comptons-les à partir du point α. Soit

$$\xi' = h\alpha$$

ou

$$\xi' = \xi + \frac{e}{6};$$

d'où

$$e + 6\xi = 6\xi',$$

et l'équation (2′) devient

$$(2'') \qquad R'_n \times \xi' = \frac{p_0 e^2}{6} = \text{const.}$$

Si, en chaque point h, on porte hH égal à la limite supérieure que peut atteindre R_n, on voit que le lieu des points H sera une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont le joint αb et sa normale en α.

La partie de la courbe comprise entre O et β est seule valable.

Pour la tracer, on observe qu'au milieu O du joint, soit pour $\xi' = \frac{e}{6}$, on a

$$R'_n = p_0 e;$$

qu'au point β, soit pour $\xi' = \frac{e}{3}$, on a

$$R'_n = \frac{p_0 e}{2}.$$

Portons donc l'ordonnée $OO' = p_0 e$ et l'ordonnée $\beta\beta' = \frac{p_0 e}{2}$ à l'échelle des forces. Nous aurons les deux extrémités de la courbe. Joignons $O'\beta$ et $\beta' b$; on vérifie sans difficulté sur l'équation (2″) que ces deux lignes sont les tangentes à l'hyperbole en ses points extrêmes. On a donc les éléments nécessaires pour la tracer approximativement.

Supposons à présent que le centre de pression sorte du tiers moyen du joint et qu'il vienne en h_1. Il est clair que le joint ba ne sera plus comprimé sur toute sa longueur, de sorte que, si R'_n conservait sa valeur Hh, la pression maxima en b dépasserait la valeur limite p_0. Mais, si R'_n devient suffisamment petit, cette pression, représentée par Bb, peut conserver sa valeur. Pour trouver la valeur à donner à R'_n pour qu'il en soit ainsi, prenons sur le joint à partir de b une longueur $ba_1 = 3bh_1$ et joignons Ba_1. Ce sont les ordonnées de cette droite qui représentent les pressions exercées entre b et a_1.

Entre a_1 et a, les pressions sont nulles, le joint ne sera pas serré; *il tendra à s'ouvrir* dans cette partie.

On voit, en effet, que la résultante des pressions représentées par le triangle ba_1B passe bien en h_1 et que la plus grande pression est toujours celle $Bb = p_0$. Il n'y a d'ailleurs que la droite ba_1 qui satisfasse à ces deux conditions. Pour qu'elles soient satisfaites, la force R'_n étant appliquée en h_1, il faut que cette force soit égale à l'aire du triangle Bba_1, soit

$$R'_n = Bb \times \frac{ba_1}{2}$$

ou, si l'on pose $bh_1 = \xi_1$,

$$R'_n = p_0 \times \frac{3}{2}\xi_1 = \frac{3}{2}p_0\xi_1.$$

Si donc on porte à partir de h_1 une ordonnée h_1H_1, à l'échelle des ordonnées Hh ou des forces, on aura

$$H_1h_1 = \frac{3}{2}\xi_1.$$

On voit que le lieu des points H_1 n'est autre que la droite $b\beta'$, tangente à l'hyperbole $O'\beta'$.

Si le centre de pression se déplaçait sur la moitié Oa du joint, c'est en a que se produirait la pression maxima et l'on obtiendrait le lieu $O'\alpha'a$ symétrique de $O'\beta'b$.

Ainsi, pour que la pression maxima p_0 soit atteinte, il faut et il suffit que la composante normale R_n de la résultante des forces élastiques soit, à l'échelle indiquée, représentée par l'une quelconque des ordonnées du contour $bO'a'$ et, pour que cette pression ne soit pas dépassée, il faut et il suffit que l'extrémité de l'ordonnée qui représenterait R_n reste à l'intérieur de ce contour.

Dès qu'elle en sort pour un joint, la condition 3° du théorème sur la stabilité établi au § 552 cesse d'être remplie.

Ce mode de représentation est dû à M. Durand-Claye qui en a fait le point de départ d'une théorie très ingénieuse des voûtes (1).

(1) *Annales des Ponts et Chaussées*, 1866 et 1867.

§ 554.

SUR LES CONDITIONS FONDAMENTALES DE LA STABILITÉ. — Des trois conditions de stabilité indiquées dans le théorème dont il vient d'être parlé, la deuxième et la troisième sont seules à la fois nécessaires et suffisantes.

Théoriquement, le centre de pression h_1 peut sortir du tiers moyen sans que la voûte périsse, pourvu 1° que la pression normale R_n acquière une valeur suffisamment petite, inférieure à $H_1 h_1$, et que la pression totale R soit assez peu inclinée sur la normale au joint pour qu'il n'y ait pas glissement.

Mais le fait qu'une partie seulement du joint se trouve alors utilisée paraît en lui-même fâcheux. Ajoutons que la loi du trapèze, très admissible quand le joint tout entier est comprimé, est bien incertaine lorsqu'il n'en est plus ainsi.

On n'est pas suffisamment sûr de la partie du joint qui travaille à la compression. C'est pourquoi il nous paraît tout à fait désirable, au point de vue pratique, que les centres de pression restent autant que possible dans le tiers moyen de la voûte. Ajoutons que, quand cette condition est remplie, les deux autres, celle relative au glissement et celle relative à la limite de la pression par unité de surface, sont ordinairement remplies d'elles-mêmes, de sorte que cette condition 1° non seulement ne semble pas devoir être abandonnée, mais se présente, dans la pratique, comme la condition capitale, la seule qui puisse donner toute sécurité. Elle a, en outre, l'avantage de conduire, comme nous allons le montrer, à une solution du problème des voûtes très expéditive et satisfaisante à tous égards.

§ 555.

IMPOSSIBILITÉ D'APPLIQUER LES PRINCIPES ORDINAIRES DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX. — Supposons, pour fixer les idées, une voûte ASCBHD, symétrique par rapport à la clef et symétriquement chargée, en sorte qu'il suffit d'en considérer une moitié ABHS (*fig.* 1, p. 2).

Divisons les joints, ainsi que la verticale du sommet HS, que nous regardons comme un joint fictif, en trois parties égales. Nous formons deux polygones ayant pour sommets : l'un, les points de

division extérieurs β_0, β_1, β_2, .. ; l'autre, les points de division intérieurs α_0, α_1, α_2, ... des joints. Les centres de pression doivent tous être compris entre ces polygones. Soient h_0 le centre de pression du joint de clef et q la résultante des pressions exercées sur ce joint : q est la poussée de la voûte. Elle est dirigée suivant l'horizontale h_0 1.

Désignons par les nos 1, 2, 3, 4, 5, 6 les voussoirs depuis la clef et par

1, 2, 3, 4, 5, 6

les lignes d'action des charges qui pèsent sur eux y compris leurs propres poids. Si nous composons la poussée q avec la force 1, nous avons la résultante dirigée suivant 1.2 et représentant la pression sur le joint qui sépare les voussoirs nos 1 et 2 ; si nous composons cette première résultante avec la force 2, nous aurons la nouvelle résultante 2.3, représentant la pression sur le joint qui sépare les voussoirs nos 2 et 3, et ainsi de suite.

Le polygone $h_0$1.2.3.4.5.6h' n'est autre que le polygone des pressions ou polygone funiculaire des charges données 1, 2, 3, ..., ayant la poussée q, à la fois pour premier côté et pour distance polaire.

Le centre de pression sur le joint qui sépare les voussoirs nos 1 et 2 est l'intersection de ce joint avec le côté 1.2, et de même pour les suivants ; pour le joint qui sépare les voussoirs nos 5 et 6, c'est l'intersection de ce joint avec le côté 6.5, *mais prolongé au-dessus de* 5 (1).

Ayant ainsi tracé le polygone des pressions, on voit : 1° si les centres de pression sont tous dans les tiers moyens des joints : 2° si les pressions, qui sont les côtés mêmes de ce polygone, font avec les normales aux joints sur lesquels elles agissent un angle moindre que l'angle de frottement.

On admet que cet angle peut aller sans inconvénient jusqu'à 15° à 20°.

Enfin les rayons polaires (*fig.* 1 *ter*) donnent les grandeurs

(1) On voit par là que le polygone des pressions ne doit pas être confondu avec celui qui aurait pour sommets les centres de pression [ainsi que nous l'avons déjà observé (§ 70)]. Ce n'est que si les joints étaient verticaux qu'il y aurait identité entre ces deux polygones.

de ces pressions que nous avons précédemment désignées par la lettre R. On a, par suite, leurs composantes R_n normales aux joints et, par la partie 3° du théorème du § 552, on peut vérifier si la pression par unité de surface qu'on admet pouvoir être supportée par les matériaux employés n'est pas dépassée.

Ainsi, la vérification de la stabilité d'une voûte ne souffrirait aucune difficulté si l'on pouvait tracer le polygone des pressions.

Mais ce tracé exige qu'on connaisse deux grandeurs : la poussée q et la distance h_0S de son point d'application au sommet de l'intrados ([1]).

Mais ces deux éléments ne pourraient être déterminés qu'en ayant égard à l'élasticité de la matière.

Si l'on admettait, par exemple, qu'une voûte se déforme comme un arc élastique qui serait encastré à ses extrémités, on pourrait appliquer les méthodes précédemment exposées; mais une telle hypothèse n'offrirait ici aucun degré de certitude.

Le mode de construction d'une voûte, le mode d'enfoncement de la clef qui est plus ou moins serrée lors de sa pose, la qualité des mortiers employés, leur degré de prise au moment du décintrement, sont autant d'éléments perturbateurs échappant à toute analyse mathématique.

Aussi, parmi les polygones funiculaires des charges données qui satisfont aux conditions de stabilité précédemment énoncées, il paraît impossible de définir, avec quelque vraisemblance, celui qui constitue le véritable polygone des pressions, tant l'assiette définitive que prend une voûte après l'enlèvement des cintres qui ont servi à l'édifier peut être modifiée par les diverses circonstances qui viennent d'être énumérées. Tous les efforts qui ont été faits pour définir le problème reposent sur des hypothèses arbitraires.

Mais, si l'on ne peut pas préciser toutes les conditions du problème, on peut indiquer des conditions qui soient *suffisantes* pour assurer la stabilité. C'est ce résultat dont le praticien peut se contenter, puisqu'il lui offre toute sécurité, que nous allons essayer d'atteindre.

([1]) Si la charge était dissymétrique, il faudrait connaître trois éléments, puisque trois conditions sont, comme nous le savons, nécessaires pour définir un polygone funiculaire quand on ne sait pas d'avance qu'il est symétrique.

§ 556.

PRINCIPE DE L'ÉQUILIBRE-LIMITE. — Parmi les modes d'équilibre, généralement en nombre illimité, qui sont statiquement admissibles, il en existe un ou, au plus, un nombre fini que nous appelons les états d'*équilibre-limite* et qui sont caractérisés par ce que, dans ces états, l'une des conditions de stabilité est sur le point de cesser d'être satisfaite, soit parce que des joints sont sur le point de s'ouvrir, soit parce que des voussoirs sont sur le point de glisser. Et nous posons en principe que si, à ce moment, l'équilibre est assuré, il le sera dans tout autre état.

Concevons, en effet, une voûte posée sur cintre. L'enlèvement des cintres se fait avec les précautions voulues pour que le tassement de la voûte ait lieu sans choc et sans mouvement brusque. Or, si la voûte devait tomber, il faudrait auparavant qu'elle passât par un des états d'équilibre-limite. Par hypothèse, elle arrive à cet état sans vitesse sensible; si donc, à cet état, son équilibre est assuré, elle ne pourra pas aller plus loin, en vertu de la définition du même mot *équilibre* (§ 1).

Ainsi, il suffit d'assurer les conditions de stabilité dans l'état ou les états d'équilibre-limite.

Nous ne prétendons pas que le polygone des pressions qui se produit dans l'un de ces états soit celui qui se réalisera effectivement. Nous disons seulement que ce dernier, quel qu'il soit, ne pourra qu'être plus favorable à la stabilité que le ou les premiers dont il suffit ainsi de s'occuper.

§ 557.

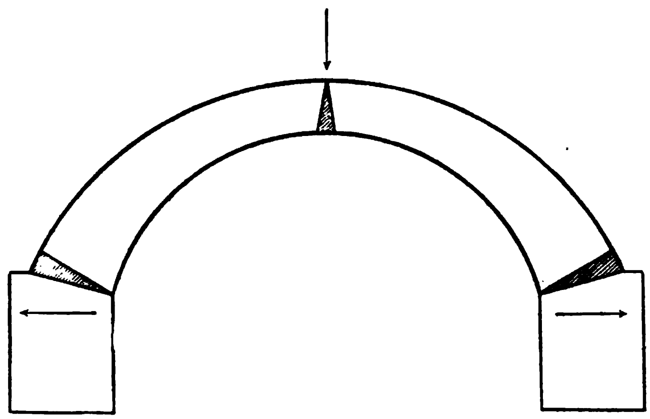
APPLICATION DE CE PRINCIPE. — Pour appliquer ce principe, nous nous appuierons sur les faits d'expériences que voici :

1° Lorsqu'une voûte surbaissée en arc de cercle tend à se rompre sous l'influence des charges qu'elle supporte habituellement, le joint de la clef s'ouvre vers l'intrados tandis que les joints des naissances s'ouvrent vers l'extrados (*fig.* 2, p. 12) pendant que les culées sont chassées vers le dehors.

Lorsque cet effet est sur le point de se produire, le polygone des pressions passe évidemment au *tiers extérieur* (¹) du joint de clef et au tiers intérieur des joints des naissances. Il est donc parfaitement défini.

2° Dans une voûte en plein cintre ou une voûte surbaissée en anse de panier, arc d'ellipse et formes similaires sur le point de se rompre, le joint de clef s'ouvre encore à l'intrados; un des

Fig. 2.



joints intermédiaires entre la clef et les naissances (ainsi que son symétrique) s'ouvre vers l'extrados et les joints des naissances s'ouvrent vers l'intrados (*fig.* 3, p. 13).

Les joints intermédiaires qui s'ouvrent ainsi se nomment les *joints de rupture*.

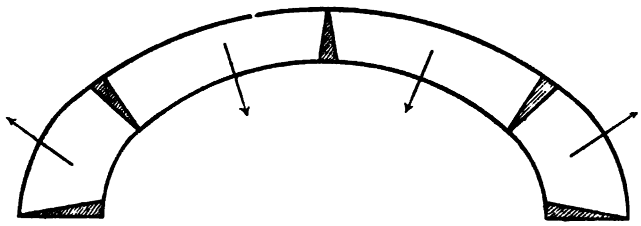
La portion de voûte comprise entre les deux joints de rupture s'abaisse, en chassant vers le dehors les parties extrêmes.

Lorsque cet effet est sur le point de se produire, le polygone des pressions passe au tiers extérieur de la clef et au tiers intérieur des *joints de rupture*.

(¹) Nous appelons *tiers extérieur* d'un joint le point situé au tiers de la longueur du joint à partir de l'extrados; *tiers intérieur*, le point situé au tiers de la longueur du joint à partir de l'intrados; *tiers moyen* de la voûte, la partie formée par les tiers moyens des joints.

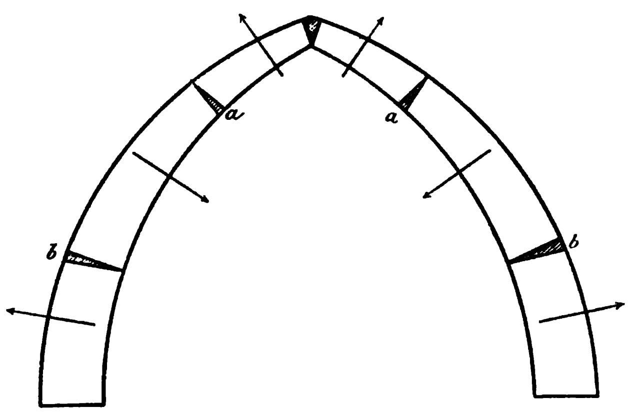
Nous verrons que cette double condition suffit pour déterminer tout à la fois le polygone des pressions et la position des joints de rupture.

Fig. 3.



3° Dans une voûte en ogive (*fig.* 4), le joint de la clef tend à s'ouvrir vers l'extrados au sommet; la voûte tend en même temps à s'ouvrir vers l'intrados dans deux joints voisins du sommet, puis vers l'extrados un peu plus bas. Les parties comprises entre les

Fig. 4.



deux joints de rupture *a* et *b* qui se produisent sur chaque moitié de la voûte tombent vers l'intérieur en chassant les parties inférieures de la voûte vers le dehors et obligeant les parties supérieures à tourner autour des arêtes extérieures des joints de rupture qui les limitent.

Ce mouvement peut se produire dans deux cas :

1° Si le polygone des pressions passant au tiers intérieur du

joint de clef et au tiers *extérieur* de quelque autre joint qui sera le joint de rupture *a* (nous verrons que ce polygone ainsi que le joint *a* est parfaitement défini) sort du tiers moyen de la voûte quelque part vers *b*;

2° Si le polygone des pressions passant au tiers *intérieur* de quelque autre joint qui sera le joint de rupture *b* (ce polygone et ce joint seront définis) sort du tiers moyen de la voûte quelque part vers *a*.

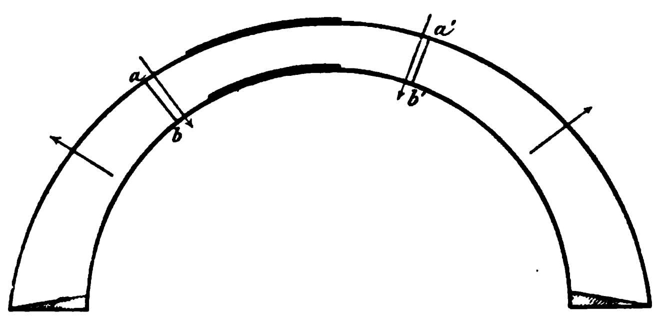
Donc, pour que le mouvement *ne puisse pas se produire,* il faut que *chacun* de ces deux polygones reste partout dans le tiers moyen de la voûte.

4° Dans ce qui précède, nous ne nous sommes occupé que des ruptures par ouvertures de joints. Les ruptures par glissement sont beaucoup plus rares.

Elles ne peuvent se réaliser que si, en même temps, il y a ouverture de certains joints.

Considérons, par exemple, une voûte exceptionnellement chargée vers son sommet.

Fig. 5.



Ce n'est guère que dans ce cas qu'on peut craindre que la partie supérieure *aba'b'* (*fig.* 5) glisse le long de deux joints, tels que *ab*, *a'b'*.

Mais, en s'enfonçant comme un coin entre ces joints, elle obligera les parties inférieures à se mouvoir vers le dehors, soit en tournant autour des arêtes extérieures des naissances, soit, plus difficilement, en glissant elles-mêmes sur les joints de naissance.

Lorsque le premier cas est sur le point de se produire, le poly-

gone des pressions passant par les tiers extérieurs des joints de naissance devra rencontrer un autre joint (et son symétrique) sous un angle donné, à savoir l'angle de frottement.

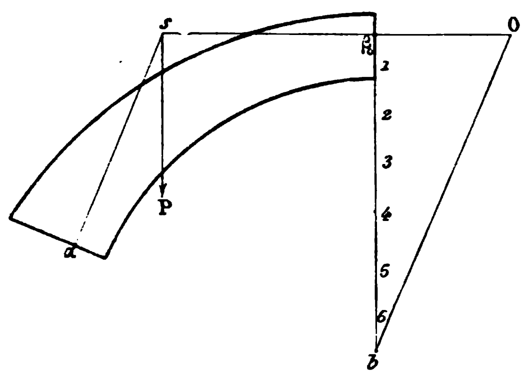
Nous verrons que ce polygone, ainsi que le joint rencontré sous cet angle, sont déterminés. Dans le second, le polygone des pressions est aussi déterminé, étant assujetti à rencontrer le joint de naissance et un autre joint (ainsi que leurs symétriques) sous l'angle de frottement.

§ 558.

SOLUTION DES PROBLÈMES QUE SOULÈVE L'APPLICATION DU PRINCIPE DE L'ÉQUILIBRE-LIMITE. — En résumé, l'application du principe précédent exige qu'on fasse le tracé d'un ou de deux polygones funiculaires satisfaisant à des conditions données, conditions variables suivant la nature de la voûte.

a. **Voûte en arc de cercle.** — On doit tracer le polygone des pressions ou polygone funiculaire des charges données assujetti à passer (*fig.* 6) par le tiers extérieur β_0 du joint de clef et le tiers intérieur α du joint des naissances.

Fig. 6.



Soit $\beta_0 b$ le polygone de ces forces. (Nous reviendrons sur le détail des opérations). Sur l'horizontale β_0, on prendra un point arbitraire et l'on tracera le polygone funiculaire correspondant (il n'est pas tracé). A l'aide de ce polygone, on trouvera la résul-

tante P des charges. On joindra le point d'intersection s de l'horizontale β_0 et de P au point α. Les lignes $\beta_0 s$ et $s\alpha$ sont les côtés extrêmes du polygone cherché.

On en aura donc le pôle O en menant bO parallèle à αs.

Le polygone funiculaire de pôle O tracé, on aura à vérifier s'il tient partout dans le tiers moyen de la voûte, s'il ne rencontre aucun joint sous un angle de plus de 20° et enfin si la pression par unité de surface n'est dépassée nulle part.

Si ces conditions sont remplies, la stabilité de la voûte est assurée; sinon on a trois moyens de la modifier entre lesquels on choisira suivant les cas :

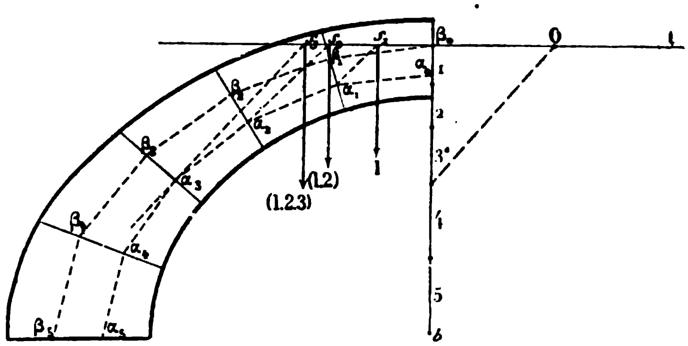
1° Décharger certaines parties de la voûte par des évidements dans les tympans;

2° Au contraire, la charger sur certains points;

3° Augmenter l'épaisseur de la voûte sur certains points.

b. **Voûtes en plein cintre, anse de panier, ellipse et similaires.** — Soient (*fig.* 7), $\alpha_0\beta_0$, $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\alpha_3\beta_3$, $\alpha_4\beta_4$, $\alpha_5\beta_5$ les joints réels ou fictifs de la voûte.

Fig. 7.



Nous supposerons qu'on la divise en cinq voussoirs. Dans la pratique, il convient naturellement d'employer un plus grand nombre de divisions. Divisons ces joints en trois parties, de manière à former le tiers moyen de la voûte compris entre les polygones $\alpha_0\alpha_1\alpha_2, \ldots, \beta_0\beta_1\beta_2, \ldots$.

On doit ici construire un polygone funiculaire des charges agis-

santes passant par le tiers extérieur β_0 de la clef, par le tiers extérieur β_5 à la naissance et ayant le côté passant par β_0 horizontal.

On peut procéder comme dans le cas précédent. Le polygone obtenu doit être contenu tout entier dans le tiers moyen de la voûte. Vers les côtés ou *reins* de la voûte, il y aura un joint tel que $\alpha_3\beta_3$ où ce polygone se rapprochera de l'intrados plus que partout ailleurs. C'est ce joint (que le polygone tracé fait connaître) qui est le *joint de rupture,* parce que c'est dans ses environs que la voûte a le plus de tendance à s'ouvrir vers l'intrados.

On peut encore procéder autrement, en considérant un second mode d'équilibre-limite résultant précisément de l'existence du joint de rupture.

On peut se proposer de tracer un polygone funiculaire passant : 1° au tiers extérieur β_0 du joint de clef; 2° au tiers intérieur d'un autre joint *inconnu* (joint de rupture); 3° ne sortant pas du tiers intérieur de la voûte.

A cet effet, soit $\beta_0 b$ le polygone des charges données. Sur l'horizontale β_0, prenons un pôle (non marqué) arbitraire et concevons qu'on trace un premier polygone funiculaire quelconque. A l'aide de ce polygone, on détermine les résultantes partielles des forces agissant sur les deux premiers voussoirs à partir du sommet, sur les trois premiers et ainsi de suite.

Soient 1 la ligne d'action de la charge qui pèse sur le premier voussoir; (1.2) la résultante de celles qui agissent sur les deux premiers voussoirs; (1.2.3) la résultante de celles qui agissent sur les trois premiers voussoirs, et ainsi de suite.

Prolongeons leurs lignes d'action jusqu'à l'horizontale β_0 en s_1, s_2, s_3, ...

Joignons $s_1\alpha_1$, $s_2\alpha_2$, $s_3\alpha_3$, ...; $s_1\alpha_1$ serait la pression exercée sur le joint α_1 si le polygone des pressions était assujetti à passer par le point α_1; $s_2\alpha_2$ serait la pression sur le joint α_2 si le polygone des pressions était assujetti à passer par le point α_2; $s_3\alpha_3$, la pression sur le joint α_3 si le polygone des pressions était assujetti à passer par le point α_3, et ainsi de suite.

Dans le premier cas, $s_1\alpha_1$ serait donc un des côtés du polygone des pressions; cela ne peut pas être, puisque cette ligne prolongée sort du tiers moyen de la voûte; dans le second cas, $s_2\alpha_2$ serait un

des côtés du polygone des pressions; cela ne peut pas être par la même raison. Dans le troisième cas, $s_3 \alpha_3$ ferait partie du polygone des pressions, ce qui est admissible, puisque la ligne $s_3 \alpha_3$ est à l'intérieur du tiers moyen de la voûte *des deux côtés du point* α_3.

Donc le polygone des pressions répondant à l'équilibre-limite que l'on considère ici est celui qui passe par le point β_0 et le point α_3. Le joint α_3 est donc le *joint de rupture* et, pour avoir le pôle O du polygone des pressions, il suffit de mener par le point 3.4 du polygone des forces une parallèle à $s_3 \alpha_3$.

C'est le polygone ainsi obtenu qui doit satisfaire aux conditions de stabilité et, s'il n'y satisfait pas, on modifiera la voûte comme nous l'avons dit à l'alinéa précédent.

c. **Voûtes en ogive.** — Supposons (*fig.* 8, p. 19) qu'il s'agisse d'une voûte en ogive. On commencera toujours par en marquer le tiers moyen à l'aide des deux polygones désignés respectivement par les lettres α_i et β_i.

On a, cette fois (§ 557), à tracer deux polygones des pressions distincts devant chacun satisfaire aux conditions de stabilité : ils partent l'un et l'autre du point α_0 et l'un d'eux doit passer par l'un des sommets α_i sans sortir du tiers moyen de la voûte; l'autre doit de même passer par l'un des sommets β_i sans sortir de ce tiers moyen.

Le premier se tracera exactement comme il vient d'être dit pour les voûtes en anse de panier, sauf que le point de départ est en α_0 et non en β_0 et que l'horizontale α_0 remplace dans les constructions celle β_0.

On trouvera ainsi et ce premier polygone et le sommet α_i par où il passe et qui constitue l'un des deux joints de rupture existant sur chaque moitié de l'ogive.

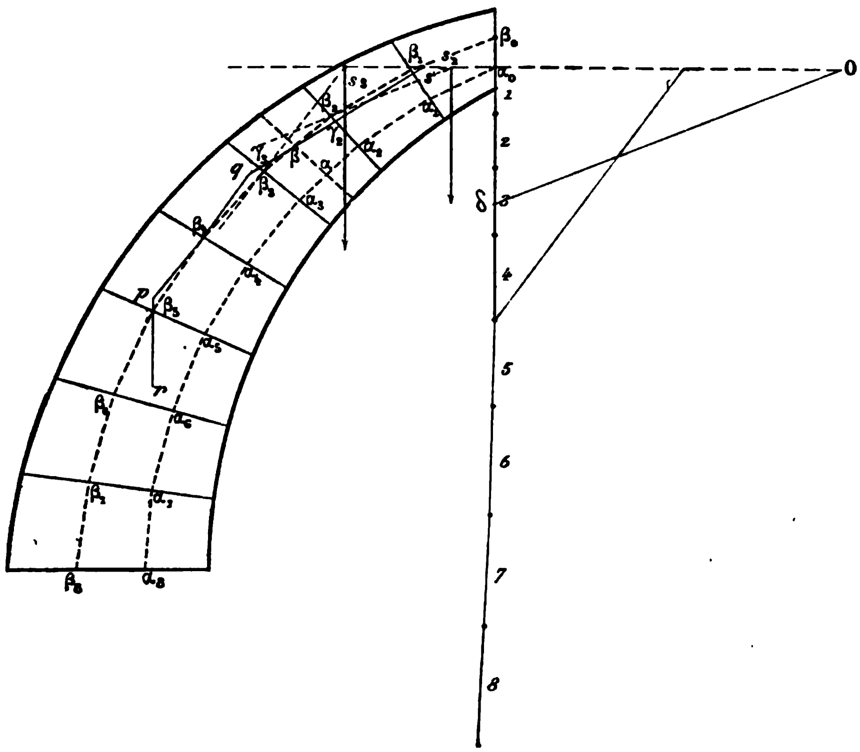
L'autre polygone se trace par une méthode pareille.

Il y a toutefois, à ce sujet, une remarque à faire. D'abord le joint de rupture par le tiers extérieur duquel passe ce second polygone n'est pas éloigné du sommet, et il se trouve rapidement.

Soit α_0 l'horizontale du point α_0. En appliquant le procédé indiqué pour l'anse de panier, soit, par exemple, s_2 le point où la charge totale agissant sur les deux premiers voussoirs coupe la poussée, c'est-à-dire l'horizontale α_0, de sorte que, si c'était le

joint $\alpha_2\beta_2$ qui fût joint de rupture, la pression sur ce joint serait $s_2\beta_2$. On trouvera de même que, si c'était $\alpha_3\beta_3$, la pression sur ce joint serait $s_3\beta_3$.

Fig. 8.



Admettons que, pour deux joints consécutifs, par exemple ceux $\alpha_2\beta_2$ et $\alpha_3\beta_3$, on trouve ainsi deux lignes $s_2\beta_2$, $s_3\beta_3$ dont la première sort du tiers moyen de la voûte à gauche du joint auquel elle se rapporte, tandis que la seconde en sort à droite du joint qui lui correspond.

Le joint de rupture se trouvera nécessairement entre les deux joints qui satisfont à cette condition. On supposera donc un joint intermédiaire, tel que $\alpha\beta$, qu'on pourra placer à vue, et c'est par le point β que devra passer le polygone des pressions.

La pression sur le joint $\alpha\beta$ sera une ligne, telle que $\gamma_2\beta\gamma_3$, qu'on obtient en prenant le point d'intersection s de la charge totale

agissant entre $\alpha_0 \beta_0$ et $\alpha\beta$ avec l'horizontale de α_0 et joignant ce point à β.

Si le joint $\alpha\beta$ a été pris assez près de $\alpha_2 \beta_2$, la ligne $\gamma_2 \beta \gamma_3$ sortira, mais très peu, du tiers moyen vers la gauche.

Portons, sur le polygone des forces, une longueur $\alpha_0 \delta$ représentant la charge comprise entre $\alpha\beta$ et $\alpha_0 \beta_0$.

Par le point δ, menons une parallèle à $\gamma_2 \beta \gamma_3$; nous aurons le pôle O du polygone des pressions cherché. On voit que, si l'on traçait ce polygone, la partie à droite de $\alpha\beta$ serait dans le tiers moyen; immédiatement à gauche de $\alpha\beta$, le côté $\beta\gamma_3$ sort bien un peu de ce tiers moyen, mais on voit que le côté suivant y rentrera et, pour que la voûte soit stable, il faut que le polygone n'en sorte plus ailleurs.

Le fait qu'il en sort un peu, près de $\alpha\beta$, est sans inconvénient.

Si, au lieu d'un nombre limité de joints, on supposait des joints fictifs continus, ce qui remplacerait tous les polygones par des courbes, on trouverait, pour la courbe des pressions cherchée, une ligne qui serait tangente en un point voisin de β à la courbe $\beta_0 \beta$ et qui, par suite, ne sortirait pas du tiers moyen. On voit donc que, si le polygone considéré en sort légèrement, cela tient à ce qu'aux courbes on substitue, pour les besoins graphiques, des polygones et il n'y a là aucune difficulté et aucun inconvénient.

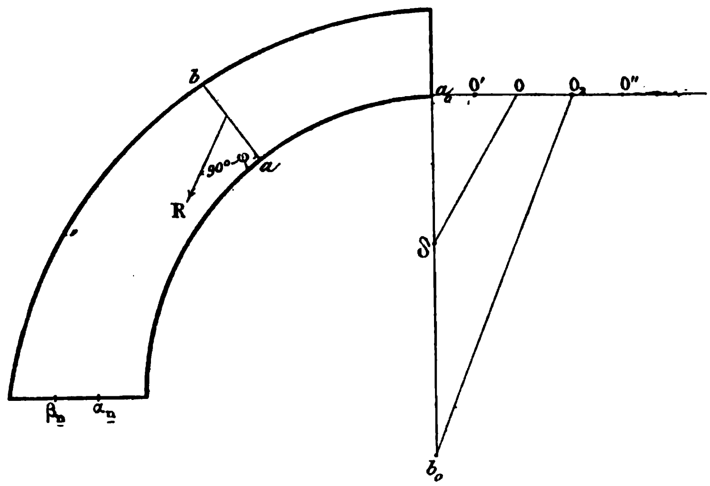
Il peut aussi arriver que, pour un joint $\alpha\beta$, on trouve une pression $\gamma_2 \beta$ en supposant que le polygone des pressions passe en β; puis pour le joint suivant, que je suppose être $\alpha_4 \beta_4$, on trouve, si le polygone des pressions passe en β_4, une pression représentée par une ligne *pq* située tout entière hors du tiers moyen; le joint suivant $\beta_5 \alpha_5$, si l'on supposait que le polygone des pressions passe en β_5, supporterait alors une pression représentée par une ligne telle que *pr*.

Dans ce cas, le joint de rupture serait celui de $\alpha_4 \beta_4$ et la ligne *pq* ferait partie du véritable polygone des pressions qu'on cherche. Le pôle de ce polygone s'obtiendrait en menant par le point 4.5 du polygone des forces une parallèle à *pq*. Ce côté *pq* serait un peu hors du tiers moyen; mais il n'en serait ainsi d'aucun des deux côtés contigus et il suffirait de vérifier que le reste du polygone se loge tout entier dans le tiers moyen.

§ 559.

CAS EXCEPTIONNEL OU L'ON REDOUTE DES GLISSEMENTS. — Si une voûte est exceptionnellement chargée vers le sommet, on peut, comme nous l'avons vu, craindre un glissement le long d'un joint *ab* (*fig.* 9) et son symétrique.

Fig. 9.



Alors le joint de naissance tend à s'ouvrir à l'intrados et le polygone des pressions-limites doit : 1° passer par le tiers extérieur β_n du joint de naissance ; 2° couper le joint de rupture inconnu *ab* sous l'angle complémentaire de celui du frottement φ.

Prenons un joint quelconque *ab* (on se bornera à les prendre dans le voisinage de ceux sur lesquels on supposera que le glissement est à redouter) ; menons une droite R faisant avec *ab* un angle complémentaire de l'angle du frottement (en général, un angle de $90° - 15° = 75°$).

Soit, sur le polygone des forces, $a\delta$ la charge totale agissant entre *ab* et le sommet de la voûte. Par le point δ menons une parallèle à R ; nous aurons le pôle O *commun à tous les polygones funiculaires assujettis à rencontrer le joint ab, sous l'angle indiqué.*

Faisons la même construction pour plusieurs joints, nous aurons ainsi divers points O. Soient O′ et O″ les positions extrêmes de ces points. On construira les deux polygones funiculaires de pôles O′ et O″, en prenant le point β_n comme point de départ, et tous deux devront se loger dans le tiers moyen de la voûte, sinon il faut la modifier.

Si l'on craignait aux naissances non une rotation, mais un glissement, par l'extrémité b_0 du polygone des forces on mènerait une droite b_0O_2 faisant avec le joint de naissance un angle complémentaire de l'angle de frottement, ce qui donnerait le pôle O_2 de *tous les polygones* des pressions compatibles avec ce glissement. Tous ces polygones seraient donc identiques et il suffirait d'en construire un et de voir si, en le déplaçant d'un mouvement de translation parallèle au joint de naissance, on pourrait lui trouver une position où il fût logé tout entier dans le tiers moyen de la voûte. Sinon, on aurait à la modifier.

§ 560.

CAS DE CHARGES DISSYMÉTRIQUES. — Ces principes s'étendraient facilement à des charges dissymétriques. On aurait, pour des voûtes en arc de cercle, à tracer un polygone funiculaire par les trois conditions de toucher les joints de naissance aux tiers intérieurs et de toucher un autre joint en son tiers extérieur.

Ce joint se déterminera par des considérations pareilles à celles que fournissent les joints de rupture des voûtes en anse de panier et en ogive.

S'il s'agit de voûtes en anse de panier, ellipse, etc., on peut ramener le problème à celui d'un arc de cercle en admettant qu'à partir des naissances jusqu'au joint incliné à 30° la voûte se tient d'elle-même et fait en quelque sorte partie du pied-droit, et en regardant le surplus comme un arc de cercle. Cette considération, préconisée par M. l'Inspecteur général des Ponts et Chaussées Kleitz, permet aussi, si on le veut, de simplifier pour les anses de panier la solution ci-dessus exposée dans le cas des charges symétriques.

§ 561.

CULÉES ET PILES. — Ayant tracé le polygone des pressions le plus défavorable dans une voûte, on le prolongera dans l'intérieur de la culée.

A cet effet, il suffira de diviser celle-ci en un certain nombre de parties par des plans horizontaux, de porter les poids de ces parties à la suite du polygone des forces relatif aux charges agissant sur la voûte et de tracer les rayons polaires correspondants.

Le prolongement de ce polygone devra être contenu dans le tiers moyen de la culée et satisfaire aux deux autres conditions de stabilité (§ 552).

Une pile, c'est-à-dire un support commun à deux arches :

1° Si les arches sont égales, ne supporte qu'une charge verticale égale au poids total d'une arche, les poussées des deux arches étant égales et opposées. Il suffit donc de vérifier que la pression maxima par unité de surface n'y dépasse pas la valeur qui convient aux matériaux employés ;

2° Si les arches sont inégales, la pile supporte une pression oblique égale à la résultante de celles que les deux arches qu'elle supporte exercent sur elles. On devra toutefois combiner la plus forte pression possible de la grande voûte avec la plus faible de la petite, afin d'envisager les conditions les plus défavorables possibles.

On composera cette force avec les poids des parties ou assises en lesquelles on subdivise la pile, ce qui donne le polygone des pressions que subissent les bases de ces assises, et il faut que ce polygone soit placé dans le tiers moyen de la pile et satisfasse aux deux autres conditions de stabilité du § 552.

Même dans le cas d'arches égales, si elles peuvent produire, suivant les circonstances (de surcharge), des poussées inégales, on devra construire les piles selon ce même principe.

§ 562.

DÉROGATION A LA RÈGLE DU TIERS MOYEN. — Il peut arriver que la règle prescrivant de loger rigoureusement la courbe des pressions dans le tiers moyen des voûtes et culées conduise à des dimensions trop fortes. Dans ce cas, comme aussi si l'on veut établir des ouvrages sveltes et que, par suite, on emploie des mortiers de très bonne qualité, on pourra se contenter de loger les courbes des pressions dans la moitié moyenne des joints au lieu du tiers moyen ; on devra alors vérifier avec soin que la pression maxima par unité de surface qu'on s'impose n'est nulle part dépassée (§ 553).

M. Kleitz admet même en principe les règles suivantes pour les points par lesquels doit passer la courbe des pressions à employer :

a. **Voûtes en arc de cercle**. — A la clef, elle doit passer au tiers extérieur du joint ; aux naissances, au quart s'il s'agit de petites, au cinquième s'il s'agit de grandes voûtes du joint à partir de l'intrados.

b. **Voûtes en anse de panier**. — On les assimile à des voûtes en arcs de cercles limitées aux joints inclinés à 30°.

§ 563.

DONNÉES PRATIQUES RELATIVES AUX VOUTES. — Nous extrayons les données qui suivent de la troisième édition du *Cours de Mécanique appliquée aux constructions* de M. Edouard Collignon ([1]).

a. **Voûtes en plein cintre**. — « L'intrados est en plein cintre lorsqu'il dessine une demi-circonférence. Le rayon ou le diamètre du cercle est donné ; les inconnues principales à déterminer sont l'épaisseur à la clef, et l'épaisseur au pied-droit.

L'épaisseur à la clef, d'après Perronnet, est exprimable par une fonction linéaire du rayon du plein cintre ; la formule de Per-

---

([1]) Première Partie, p. 588, § 325.

ronnet, traduite en mesures métriques, est à peu près la suivante

$$e = \frac{r}{15} + 0,33.$$

r est, en mètres, le rayon du plein cintre, e est, en mètres, l'épaisseur à la clef.

Cette formule est incomplète; car elle ne contient pas de terme variable avec la surcharge de la voûte, éléments dont on ne peut pas négliger l'influence. On trouve dans les ouvrages de Sganzin une Table des voûtes en plein cintre, pour des surcharges comme celles qui conviennent aux ponts pour route; on suppose les reins de la voûte remplis jusqu'au niveau de l'extrados à la clef, et par-dessus une voie charretière, formée d'un pavage de $0^m,40$ d'épaisseur. Voici cette Table :

Pleins cintres (1).

DIAMÈTRE de l'arche.	ÉPAISSEUR à la clef.	ÉPAISSEUR DES CULÉES, la hauteur des pieds-droits étant de						
		0^m.	1^m.	2^m.	3^m.	4^m.	6^m.	8^m.
m	m	m	m	m	m	m	m	m
1	0,36	0,40	0 50	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80
2	0,40	0,45	0,70	0,80	0,85	0,95	1,00	1,10
3	0,43	0,50	0,80	0,95	1,05	1,15	1,25	1,35
4	0,46	0,60	0,90	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
5	0,50	0,65	1,00	1,20	1,30	1,45	1,55	1,70
6	0,53	0,75	1,10	1,30	1,45	1,60	1,75	1,90
7	0,56	0,85	1,20	1,40	1,60	1,75	1,90	2,10
8	0,60	0,95	1,30	1,50	1,70	1,85	2,10	2,25
9	0,63	1,05	1,40	1,60	1,85	2,00	2,25	2,40
10	0,67	1,20	1,50	1,75	2,00	2,15	2,40	2,60
12	0,74	1,40	1,75	2,00	2,20	2,40	2,65	2,90
15	0,84	1,75	2,10	2,30	2,60	2,80	3,15	3,40
20	1,04	2,30	2,65	2,80	3,10	3,35	3,65	4,00
30	1,35	3,25	3,55	3,80	4,10	4,40	4,80	5,20
40	1,69	4,20	4,50	4,80	5,10	5,40	5,80	6,20
50	2,06	5,15	5,40	5,80	6,10	6,40	6,80	7,20

(1) Lorsque la voûte est construite en maçonnerie de ciment, on peut réduire d'un tiers les épaisseurs à la clef donnée par cette Table ou par la formule de Perronnet.

b. **Ponts pour chemins de fer.** — Les *ponts en dessus* pour chemins de fer sont dans d'autres conditions, et ces Tables ne peuvent suffire. Le remblai qui pèse sur la voûte peut être très élevé, et s'il y a peu de hauteur entre la voie et l'extrados, on cherche, en général, à introduire entre ces deux niveaux un matelas de terrassement assez épais pour amortir, pendant le passage des trains, les ébranlements qui seraient nuisibles à la conservation des maçonneries. Pour les voûtes très chargées, l'emploi de la courbe des pressions paraît donc indispensable.

On se servait, il y a quelques années, en Allemagne et en Russie, des formules suivantes, où entre la hauteur de la surcharge en terre au-dessus de l'extrados. Ces formules s'appliquent aux pleins cintres et aux voûtes en ellipse ou en anse de panier.

Soient

D l'ouverture libre, ou portée de la voûte;

f la flèche ou montée, égale à $\frac{D}{2}$ dans les voûtes en plein cintre;

e l'épaisseur à la clef;

H la hauteur du pied-droit, entre la fondation et les naissances;

R la hauteur de la surcharge de terre au-dessus de l'extrados à la clef;

r le rayon de l'intrados, égal à f ou à $\frac{D}{2}$ dans les pleins cintres, égal, dans les ellipses, au rayon de courbure au sommet;

Y l'épaisseur de la culée ou pied-droit.

On calculera e et Y, qui sont les inconnues, par les formules

$$e = 0^{m},43 + \frac{r}{10} + \frac{R}{50},$$

$$Y = 0^{m},305 + \frac{D}{8}\left(\frac{3D - f}{D + f}\right) + \frac{H}{6} + \frac{R}{12}.$$

Lorsque la voûte est en plein cintre, Y devient égal à

$$0^{m},305 + \frac{5}{24}D + \frac{1}{6}H + \frac{1}{12}R.$$

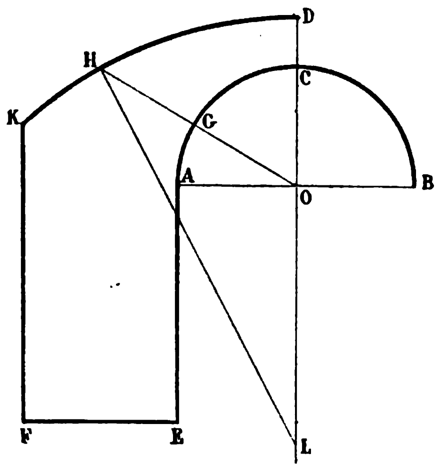
L'extrados des voûtes en plein cintre peut se tracer comme il suit.

Soient (*fig.* 10)

ACB le plein cintre;
AB le plan de naissance;
AE la hauteur des pieds-droits.

La formule donne l'épaisseur CD à la clef et l'épaisseur EF de la culée.

Fig. 10.



Par le centre O de l'intrados, menons une droite OH faisant avec l'horizon un angle de 30°; à partir du point G où cette droite rencontre l'intrados, prenons GH = DC × 2; puis faisons passer par le point D un arc de cercle ayant son centre L sur la verticale CO, et passant par le point H. Prolongeons cet arc par une tangente en H jusqu'à la rencontre de la verticale FK, qui représente la face postérieure de la culée. La ligne DHK sera l'extrados.

On a aussi les formules

$$\text{surf. HGCD} = \frac{1}{2}(1{,}317\,er + 0{,}806\,e^2)$$

et

$$\text{arc HD} = \frac{\varpi r}{6} + \frac{\text{surf. HGCD}}{r},$$

qui simplifient le métré de la voûte.

La solution qu'on vient d'indiquer conduit à donner à la voûte

une épaisseur croissante de la clef aux naissances, et au pied-droit une épaisseur constante. Tous les constructeurs ne sont pas d'accord sur ce sujet; les uns veulent que la voûte reçoive partout la même épaisseur, comme l'archivolte d'une arcade; d'autres font varier l'épaisseur du pied-droit aux diverses assises, en donnant à la maçonnerie des retraites successives de la base au sommet.

La théorie est trop imparfaite pour décider laquelle est la meilleure de toutes ces solutions.

Les formules précédentes donnent des épaisseurs très fortes; l'usage des constructeurs français n'est pas aujourd'hui de surcharger ainsi les voûtes, en augmentant inutilement leur poids propre.

On peut se proposer de tracer l'extrados d'une voûte dont l'intrados est donné, de manière qu'il y ait coïncidence exacte entre les courbes des pressions que l'on obtient en considérant successivement la voûte avec ou sans sa surcharge. S'il en est ainsi, l'addition de la surcharge n'aura d'autre effet que d'augmenter, dans chaque section, les pressions dans un même rapport, et la déformation de la voûte n'en sera pas sensiblement modifiée. On résout facilement ce problème quand on admet le partage de la voûte par des plans verticaux; il suffit en effet de prendre pour extrados une ligne qui divise dans un même rapport les portions de verticale comprises entre la courbe d'intrados et la ligne limitative de la surcharge, supposée ramenée au même poids spécifique que les matériaux de la voûte. On peut passer alors de la voûte chargée à la voûte sans surcharge par une simple réduction du poids spécifique attribué aux matériaux. La poussée à la clef et toutes les pressions subissent une réduction proportionnelle.

c. **Voûtes en arc de cercle**. — On donne en général aux voûtes en arc de cercle une flèche qui varie du huitième au douzième de l'ouverture; très souvent elle est du dixième.

Les formules que nous avons données pour le plein cintre s'appliquent aux arcs de cercle. Le rayon r de l'arc se déduit de l'ouverture D et de la montée f.

On a en effet

$$\frac{D^2}{4} = f(2r - f),$$

d'où l'on tire

$$r = \frac{f}{2} + \frac{D^2}{8f}.$$

Si l'arc est surbaissé au dixième,

$$r = \left(\frac{1}{20} + \frac{10}{8}\right) D = \frac{13}{10} D.$$

d. **Voûtes en ellipse ou en anse de panier.** — Soient encore f la montée, D l'ouverture; si l'on appelle x et y les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipse, rapportée à son centre et à ses axes, on aura entre x et y la relation

$$\frac{4x^2}{D^2} + \frac{y^2}{f^2} = 1,$$

qui permet de construire la courbe par points.

En général, on prend f égal au tiers de D, et alors on peut se servir de la Table qui suit pour déterminer l'épaisseur des pieds-droits, les conditions de charge de la voûte étant les mêmes que celles qui ont été indiquées dans le cas des voûtes en plein cintre.

PORTÉE de l'arche D.	ÉPAISSEUR à la clef *e*.	ÉPAISSEUR DES CULÉES Y, pieds-droits étant de la hauteur H des						
		1m.	2m.	3m.	4m.	5m.	6m.	8m.
m	m	m	m	m	m	m	m	m
1	0,38	0,65	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
2	0,43	0,90	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,35
3	0,50	1,10	1,35	1,45	1,50	1,60	1,65	1,70
4	0,56	1,35	1,65	1,80	1,90	1,95	2,00	2,10
5	0,61	1,55	1,85	2,00	2,10	2,20	2,30	2,40
6	0,66	1,65	1,95	2,15	2,30	2,45	2,55	2,70
7	0,70	1,75	2,05	2,35	2,50	2,65	2,75	3,00
8	0,74	1,85	2,25	2,50	2,70	2,85	3,00	3,30
9	0,79	1,95	2,40	2,70	2,90	3,13	3,25	3,50
10	0,84	2,10	2,50	2,80	3,05	3,20	3,40	3,70
12	0,95	2,30	2,80	3,15	3,40	3,65	3,80	4,00
15	1,10	2,60	3,15	3,50	3,90	4,10	4,30	4,60
20	1,35	3,20	3,80	4,20	4,50	4,80	5,00	5,30
30	1,85	4,40	5,00	5,40	5,70	6,10	6,40	6,70
40	2,35	5,50	6,20	6,60	6,90	7,50	7,80	8,40
50	2,85	6,70	7,40	7,80	8,20	8,80	9,20	9,60

Pour appliquer les formules générales relatives aux ponts pour chemins de fer, il faudrait prendre pour r la valeur du rayon de courbure de l'ellipse à la clef, c'est-à-dire

$$r = \frac{D^2}{4f},$$

et lorsque l'ellipse est surbaissée au tiers

$$r = \frac{3}{4}D.$$

Les courbes en anse de panier sont des imitations d'ellipse au moyen d'une série d'arcs de cercle qui se raccordent l'un à l'autre. Le calcul de leurs dimensions se fait au moyen des mêmes formules et des mêmes Tables.

e. **Voûtes en plate-bande.** — La plate-bande ne s'emploie que pour recouvrir un espace vide de petite dimension, comme une fenêtre. Il est impossible de tracer les joints perpendiculairement à l'intrados; l'usage est de les faire converger vers un point pris arbitrairement sur l'axe de la voûte.

§ 564.

EMPLOI DE JOINTS FICTIFS VERTICAUX. — La détermination des charges des différents voussoirs est une opération préliminaire au tracé du polygone des pressions qui présente une certaine longueur. S'il s'agit d'un voussoir *abcd* (*fig.* 11, p. 31) avec sa surcharge $cdc'd'$, il faut déterminer :

1° Le centre de gravité g du trapèze $cdc'd'$;

2° Celui g_1 du voussoir *abcd*;

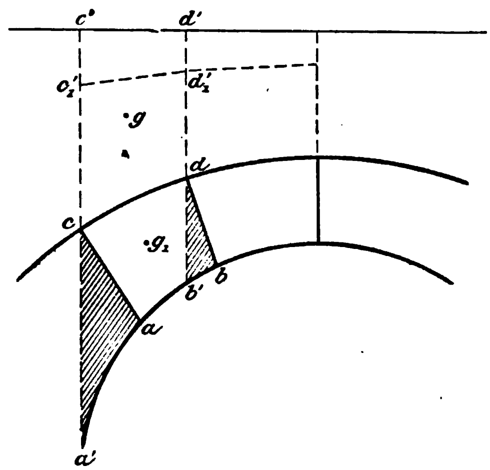
3° Ramener les aires de ces deux quadrilatères à celles de triangles à base commune (§ 15);

4° Réduire la hauteur du triangle représentatif de $cdc'd'$ dans le rapport du poids spécifique du remblai à celui de la maçonnerie;

5° Composer des forces proportionnelles aux longueurs définitives qui représentent les poids du voussoir et de sa surcharge et appliquées aux centres de gravité trouvés g et g_1.

On peut réduire ces opérations à peu de chose par la remarque suivante : prolongeons les verticales $c'c$ et $d'd$ jusqu'à l'intrados en a' et b' et considérons, par exemple, le triangle $bb'd$.

Fig. 11.



La portion de voûte projetée suivant ce triangle doit être en équilibre sous l'action :

1° De la pression sur le joint db exercée de la droite vers la gauche;

2° De la pression exercée sur le joint fictif vertical db' de la gauche vers la droite;

3° Du poids du petit massif dbb'.

Mais ce poids est négligeable devant les pressions.

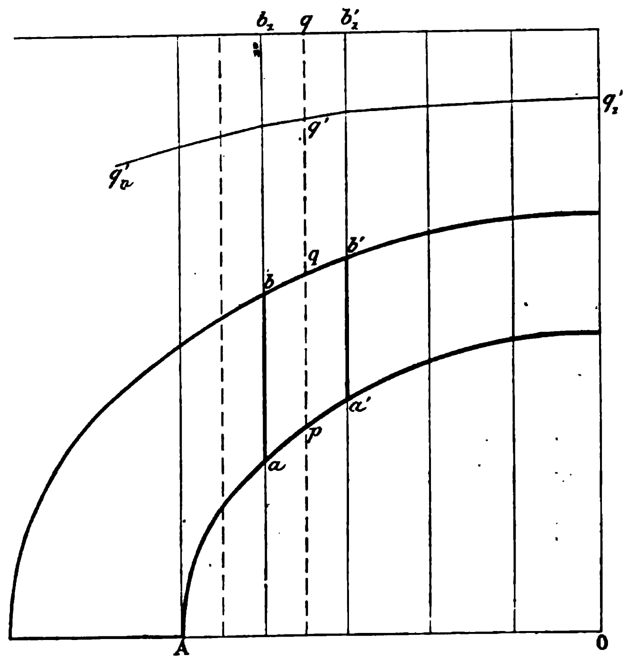
On peut donc dire que ce massif est sensiblement en équilibre sous l'action des pressions qui s'exercent sur ses deux faces latérales, ce qui exige que ces deux pressions soient sensiblement égales et opposées et, par suite, les pressions exercées de droite à gauche sur le joint db et sur le joint vertical db' sont sensiblement égales et de même sens, de sorte que, pratiquement, on peut remplacer le premier joint par le second, au point de vue du tracé des polygones des pressions.

Quand il s'agira ensuite de vérifier qu'il n'y a ni glissement, ni

pression trop forte par unité de surface, on considérera les joints normaux *db*.

D'après cela, ayant une voûte quelconque, divisons (*fig.* 11), la demi-portée $OA = a$ en parties égales; soit n le nombre des parties, en sorte que chacune d'elles ait une longueur $\frac{a}{n}$.

Fig. 11 *bis*.



Les verticales des points de division déterminent des joints fictifs tels que ab, ab'. Les verticales équidistantes de celles-ci, telles que pq, sont les lignes d'action des charges que supportent les voussoirs fictifs $aba'b'$.

Réduisons les portions d'ordonnées pq comprises entre la surface qui limite le remblai et celle qui limite la maçonnerie dans le rapport du poids spécifique de la terre à celle de la maçonnerie.

Nous aurons une ligne $q'_1 q' q'_n$.

Nous pouvons admettre que, suivant chaque verticale pq', agit une force égale au poids $abb_1a'b'b'_1$ et que ce poids est sensible-

ment égal à

$$\Pi \times pq' \times \frac{a}{n},$$

Π étant le poids spécifique de la maçonnerie.

Il est donc proportionnel à l'ordonnée pq'.

Ainsi, il suffit d'appliquer suivant les verticales des points p, milieux des intervalles des premiers points de division, des forces représentées par les ordonnées correspondantes pq'. Ce sont ces ordonnées qu'il suffira de porter bout à bout pour former le polygone des forces données, ou ces ordonnées réduites dans un rapport quelconque.

Supposons qu'on les réduise dans le rapport $1 : m$, c'est-à-dire qu'au lieu de la force

$$F = \Pi \times \frac{a}{n} \times pq'$$

on porte sur le polygone des forces une longueur

$$\frac{pq'}{m}.$$

Alors, à chaque unité de longueur mesurée sur le polygone des forces (à l'échelle du dessin ou des longueurs) répond une force

$$\Pi a \times \frac{m}{n},$$

unités de force. C'est là ce qui définira l'échelle des forces.

§ 565.

RÉSUMÉ DES OPÉRATIONS A FAIRE POUR L'ÉTUDE D'UNE VOUTE. — Nous supposons une voûte en arc d'ellipse (*Pl. XLI*) de 40^m d'ouverture, 10^m de flèche, dont la moitié est représentée à l'échelle de $\frac{1}{100}$.

Les opérations successives à faire sont celles que nous allons indiquer :

1° On tracera l'intrados.

2° On déterminera les épaisseurs à la clef et aux naissances, on tracera l'extrados et les culées. Nous supposons aux culées 6^m de

hauteur. Nous donnons 3^m d'épaisseur à la clef et 7^m aux naissances. Cela est à peu près conforme aux indications du § 563.

3° On divisera la demi-corde en un certain nombre de parties égales. Nous avons supposé 10 parties égales. Les points de division sont marqués par des croix. Les verticales de ces points de division ainsi que le milieu et l'extrémité de la corde déterminent les joints fictifs. On tracera donc les portions de ces verticales comprises entre l'intrados et l'extrados.

On divisera ces portions d'ordonnées en trois parties égales, ce qui donne à l'intérieur de la voûte les points marqués α_i et β_i, points qu'on relie de manière à obtenir les polygones qui limitent le tiers moyen de la voûte.

4° On prendra les milieux des points de division marqués par des croix. Les verticales de ces points de division sont celles suivant lesquelles agissent les charges. On tracera donc les portions de ces nouvelles verticales comprises entre l'intrados et le dessus du remblai.

Supposons que le poids spécifique de la maçonnerie soit de 2400^{kg} par mètre cube et celui du remblai de 1800, soit les $\frac{3}{4}$ de celui de la maçonnerie. On prendra les $\frac{3}{4}$, à partir de l'extrados, de chacune des verticales tracées dans le remblai. On forme ainsi la ligne $q'q'$: et la charge qui agit équivaut à une charge tout entière en maçonnerie et limitée par cette ligne.

Soient

$$1,\ 2,\ 3,\ 4.\ \ldots\ 10$$

les verticales des charges,

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_{10}$$

les longueurs des portions de verticales comprises entre l'intrados et la ligne $q'q'$, ces ordonnées étant mesurées à l'échelle du dessin, soit en centimètres.

Ces ordonnées sont proportionnelles aux poids des voussoirs fictifs limités par les joints verticaux, et le poids du voussoir avec sa charge, dont le milieu répond à l'ordonnée y_i, est de

$$2400 \times \frac{20}{10} y_i = 4800 y_i^{kg};$$

5° On formera le polygone des forces représentées par ces charges.

Il suffit de porter les ordonnées y_i réduites de façon à ne pas allonger outre mesure ce polygone. Nous les réduisons ici au $\frac{1}{10}$, de sorte que les longueurs

$$1, \ 2, \ 3, \ 4 \ \ldots . \ 10$$

du polygone des forces sont

$$\frac{y_1}{10}, \ \frac{y_2}{10}, \ \frac{y_3}{10}, \ \ldots, \ \frac{y_{10}}{10},$$

et par suite, une longueur de $0^m,01$ sur le polygone des forces représente

$$10 \times 4800 = 48000^{kg} = 48 \text{ tonnes}.$$

Telle est l'échelle des forces.

6° On prendra sur l'horizontale du point a_0, origine du polygone des forces, un pôle O et l'on tracera, en partant de C, le polygone funiculaire Cp_0 relatif à ce pôle.

7° On prolongera le côté extrême $p_0.10_0$ jusqu'à l'horizontale Ca en σ_{10}. La verticale de σ_{10} est la ligne d'action de la charge totale. On la prolongera jusqu'à sa rencontre en s_{10} avec l'horizontale du tiers extérieur β_0 du joint du sommet et on la joindra au tiers intérieur du joint α_{10} des naissances.

S'il s'agissait d'un arc de cercle, on aurait à construire un polygone des pressions passant par β_0 et α_{10}; son dernier côté serait $s_{10}\alpha_{10}$ et, par suite, en menant par l'extrémité du polygone des forces une parallèle à cette ligne jusqu'à l'horizontale a_0O, on aurait le pôle de ce polygone. Ce polygone devrait être contenu dans le tiers moyen de la voûte, faute de quoi elle serait à modifier suivant les indications du § 558.

8° S'il s'agit, comme ici, d'un arc d'ellipse, on prolongera, de même, les côtés $10_0.9_0$, $9_0.8_0$, ... du polygone p_0C jusqu'à leurs rencontres en σ_9, σ_8, ... avec la corde de l'arc et, par des verticales, on reportera ces points en s_9, s_8, ... sur l'horizontale de β_0. On alignera une règle successivement suivant les points s_9 et α_9, s_8 et α_8, ..., jusqu'à ce qu'on trouve une droite $s_i\alpha_i$ qui, de part et d'autre du point α_i, soit dans le tiers intérieur de la voûte. Ce sera le joint de rupture. La ligne $s_i\alpha_i$ (ici $s_9\alpha_9$) sera un côté du poly-

gone des pressions. On tracera le rayon polaire correspondant $i.i+1$ (ici 9.10), c'est-à-dire que, par le point qui sépare les côtés 9 et 10 du polygone des forces, on mène une parallèle à $\alpha_9 s_9$ et l'on aura le pôle O' du polygone des pressions. Ce polygone devra tenir dans le tiers moyen de la voûte. Cela a lieu ici. Si cela n'avait pas lieu, il faudrait renforcer la voûte aux points faibles ou alléger la charge par des évidements, etc.

9° Une fois assuré que le polygone tient dans le tiers moyen de la voûte, si l'on voulait s'assurer qu'il n'y a pas glissement, par les milieux des joints verticaux fictifs, on tracerait des joints normaux à l'intrados et l'on verrait si les côtés du polygone des pressions qui leur correspondent font partout avec leurs normales un angle inférieur à l'angle de glissement de 15° à 30°, suivant les cas.

10° Si enfin on voulait connaître, en chaque joint, la pression maxima, il suffirait de prendre la longueur du rayon polaire r qui mesure la pression sur ce joint, de projeter ce rayon sur la normale au joint, ce qui donne une longueur que nous appellerons r_n.

Cette longueur r_n mesurée en centimètres représente, d'après l'échelle des forces, une force

$$R_n = 48000 \times r_n^{\text{kg}}.$$

On mesurera la longueur e du joint et la distance ξ du centre de pression de R_n au milieu du joint. On devrait, par suite, avoir (§ 552), p_0 étant la plus grande pression par centimètre carré, exprimée en kilogrammes, qu'on veut admettre,

$$\frac{48000 \times r_n}{e}\left(1 + \frac{6\xi}{e}\right) \leq p_0.$$

On peut donc voir si nulle part cette pression ne dépasse la limite admissible eu égard aux matériaux employés.

11° Ayant tracé le polygone des pressions, on peut le prolonger jusqu'au pied de la culée en divisant celle-ci en un certain nombre de parties par des lignes horizontales.

Ici nous supposons deux parties séparées par l'horizontale ab des naissances. Nous remplaçons le trapèze $aa'cc'$ par celui $aa'bb'$ limité par la verticale bb' du milieu de cc' et de même le trapèze aca_1c_1 par le rectangle $ab''a_1b_1$.

Le centre de gravité du trapèze $aa'bb'$ est sur la ligne moyenne lm et son aire est égale à

$$lm \times ab.$$

Il faut la réduire à la base commune des trapèzes précédemment considérés et ayant les lignes y_i pour lignes moyennes; cette base est de

$$\frac{20^m}{10} = 2^m.$$

La hauteur correspondante sera

$$lm \times \frac{ab}{2}.$$

Mesurant ab à l'échelle du dessin ou en centièmes, on trouve

$$ab = 6,$$
$$\frac{ab}{2} = 3.$$

Par suite, la hauteur à prendre à la place de lm est

$$lm \times 3.$$

Et comme nous avons réduit les y_i au dixième de leur valeur, c'est aussi le dixième de cette grandeur qu'on portera sur le polygone des forces à la suite des forces qui y sont indiquées.

De même le centre de gravité du rectangle $aa_1b''b_1$ est sur la verticale l_1m_1 de son milieu et son aire est égale à

$$l_1m_1 \times ab'.$$

On réduira la hauteur l_1m_1 à

$$l_1m_1 \times \frac{ab'}{2} \times \frac{1}{10} = l_1m_1 \times \frac{ab'}{20},$$

pour la porter sur le polygone des forces.

Appelons 11 et 12 les deux nouvelles forces ainsi obtenues : on mènera les rayons polaires correspondants et l'on prolongera le polygone funiculaire ou polygone des pressions jusqu'au pied de la culée.

La pression sur a_1b_1 doit faire avec la verticale un angle moindre que l'angle du frottement de la maçonnerie sur la fondation. Elle

doit autant que possible se trouver dans le tiers moyen de la base $a_1 c_1$ de la culée (certains ingénieurs admettent cependant la moitié moyenne et il y en a qui admettent que la résultante peut couper la base au $\frac{1}{5}$ de sa longueur à partir de son extrémité), et la plus grande pression verticale obtenue comme pour un des joints de la voûte ne doit pas dépasser celle qu'on veut admettre suivant la résistance du sol sur lequel on s'appuie.

Cette plus grande pression se détermine par la formule qui vient d'être rappelée.

Les vérifications analogues peuvent être faites sur la section ac de la culée et généralement, si on l'avait divisée en plusieurs assises par des plans horizontaux, sur chacune des sections déterminées par ces plans.

§ 566.

MÉTHODE DE M. DURAND-CLAYE. — Nous terminerons par un exposé sommaire de la méthode de M. Durand-Claye pour les détails de laquelle nous renverrons aux articles publiés par cet ingénieur dans les *Annales des Ponts et Chaussées* en 1866 et 1867.

Soit (*fig.* 12, p. 39) $a_0 b_0 ab$ une portion de voûte comprise entre la clef $a_0 b_0$ et un joint quelconque ab. Pour que la pression limite p_0, que peuvent supporter les matériaux employés, ne soit pas dépassée à la clef, il faut (§ 553) que l'extrémité de la ligne représentant la pression totale exercée sur ce joint tombe à l'intérieur d'une aire $a_0 O_0 b_0$ que nous savons tracer.

Pour qu'elle ne soit pas dépassée sur un joint quelconque ab, il faut que l'extrémité de la ligne représentant la composante normale de la pression exercée sur ce joint tombe à l'intérieur d'une aire analogue aOb.

On peut combiner cette seconde condition avec la première, de façon à resserrer entre des limites plus étroites les poussées admissibles.

Prenons en effet sur le joint ab un point quelconque h et menons l'ordonnée hH du contour aOb. Si h est le centre de pression sur ab et si la pression R exercée sur ce joint atteint sa limite supérieure, la composante normale R_n de cette pression sera hH. Donc, si par le point H on mène une parallèle à ab,

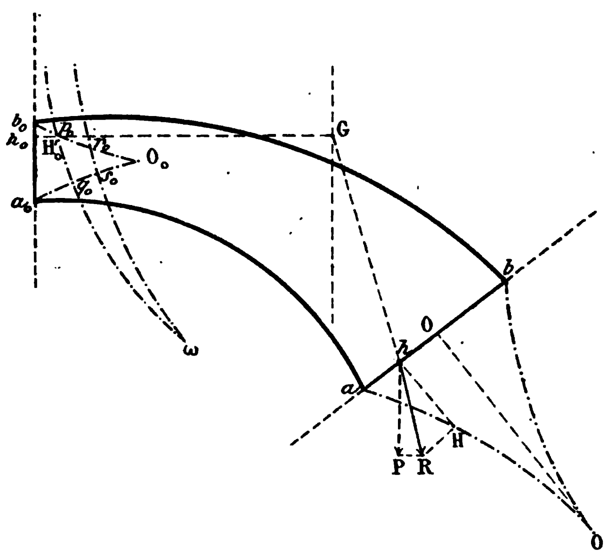
l'extrémité de la ligne représentant la force R sera sur cette parallèle.

D'autre part, la force R peut s'obtenir en composant le poids P de la portion de voûte $a_0 b_0 a b$ avec la poussée, laquelle est horizontale.

Menons donc la verticale hP représentant à l'échelle des ordonnées des contours aOb et $a_0 O_0 b_0$, c'est-à-dire, à l'échelle des forces, le poids P.

Si, par le point P, on mène une horizontale, on aura un second

Fig. 12.



lieu de l'extrémité de la force R : cette extrémité se trouvera donc en R à l'intersection des deux lieux ; par suite, si h est le centre de pression sur le joint ab, la pression limite sur ce joint sera représentée en grandeur, direction et sens par la ligne hR.

Prolongeons-la jusqu'en G en son point de rencontre avec la verticale de la charge qui porte sur la portion $a_0 b_0 a b$ de la voûte et menons l'horizontale Gh_0 ; h_0 sera le point d'application de la poussée et $h_0 H'_0 =$ PR sera cette poussée.

Pour différents points h pris sur la moitié aO du joint ab, on obtient ainsi une courbe $p_0 \omega$ lieu des points H'_0, et si le point h

se déplace sur la moitié bO du joint ab, le lieu des points H'_0 formera une seconde courbe $r_0\omega$.

Il faut que l'extrémité de la poussée soit comprise entre ces deux courbes pour que la pression p_0 ne soit pas dépassée sur le joint ab. Et, comme elle doit déjà être comprise entre les courbes a_0O_0 et b_0O_0 pour que la pression ne soit pas dépassée sur le joint de la clef, il faudra, en définitive, qu'elle soit comprise dans le quadrilatère $p_0q_0r_0s_0$.

Mais le raisonnement que nous venons de faire pour le joint ab peut se répéter pour tous les joints.

On aura, pour chacun, deux courbes telles que p_0q_0 et r_0s_0 entre lesquelles doit se trouver l'extrémité de la poussée. On aura donc finalement un quadrilatère, tel que $p_0q_0r_0s_0$, aussi resserré que possible et tel que les poussées dont les extrémités tombent dans l'intérieur de ce quadrilatère soient les seules qui ne fournissent partout que des pressions inférieures ou au plus égales à celle p_0 que peut supporter sans danger la pierre employée.

Si ce quadrilatère se réduisait à une ligne, c'est-à-dire si le côté r_0s_0 coïncidait avec p_0q_0, il n'y aurait que les poussées terminées à p_0q_0 admissibles; si r_0s_0 passait à gauche de p_0q_0, il n'y aurait aucune poussée admissible; il faudrait modifier la voûte.

Si donc on trace :

1° Le contour $a_0O_0b_0$ pour le joint de clef;

2° Les contours aOb pour différents joints ab;

3° Les courbes $p_0\omega_0$, $r_0\omega_0$, déduites de celles aOb et que M. Durand-Claye appelle les *déformées* des premières, on saura s'il existe des poussées compatibles avec la résistance limite des matériaux employés et l'on aura toutes ces poussées.

Or il est facile de démontrer que ces déformées sont composées d'arcs d'hyperboles du second degré.

Les poussées limites au pourtour du quadrilatère $p_0q_0r_0s_0$ donnent la pression maxima p_0 en un joint.

Et, parmi elles, celles qui répondent aux quatre sommets de ce quadrilatère donnent cette pression maxima en deux joints. Ce sont donc les plus dangereuses, celles qui répondent à l'équilibre-limite déduit de la condition d'une résistance limite des matériaux employés.

On devra vérifier si aucun de ces quatre polygones funiculaires répondant à ces poussées dangereuses ne peut donner lieu à glissement, c'est-à-dire ne coupe un joint sous un angle supérieur à celui du frottement.

On voit que cette méthode est très sûre et très ingénieuse, et si l'on n'admet pas la condition du tiers moyen, elle est parfaitement rationnelle.

§ 567.

MÉTHODE DU GÉNÉRAL PEAUCELLIER. — Une méthode un peu différente a été proposée par M. le Général Peaucellier en 1875, dans le nº **24** du *Mémorial de l'officier du Génie.*

M. Peaucellier laisse d'abord de côté la condition de la limite de résistance des matériaux; il commence par chercher toutes les poussées compatibles avec les conditions purement statiques du problème, c'est-à-dire avec :

1º La condition qu'il n'y ait de glissement sur aucun joint;

2º Celle que les centres de pression sur tous les joints soient à l'intérieur de la voûte.

Ce n'est qu'ensuite qu'il cherche, parmi les poussées ainsi obtenues, celles qui ne fournissent nulle part de pression par unité de surface supérieure à celle que l'on veut admettre.

Pour plus de détails, nous renverrons à l'élégant Mémoire susmentionné de M. le Général Peaucellier.

CHAPITRE II.

COUPOLES EN MAÇONNERIE.

§ 568.

HYPOTHÈSES ET PRINCIPES. — Nous supposons dans la coupole une première série de joints fictifs continus et infiniment voisins les uns des autres, suivant les plans méridiens de la voûte et une deuxième série de joints également continus et infiniment voisins les uns des autres suivant les cônes de révolution normaux à l'intrados.

Nous faisons, de plus, abstraction de l'adhérence des mortiers, en sorte que, dans tous ces joints, la voûte ne peut résister qu'à des compressions.

Ces hypothèses sont évidemment défavorables à la stabilité.

§ 569.

POINT NEUTRE. — Soit (*fig.* C, *Pl. XLIII*) $A_0 B_0 A_n B_n$ la section méridienne *principale* ou parallèle au plan de la figure. Nous pouvons, comme nous l'avons déjà fait pour les coupoles métalliques (IIIe Partie), les charges étant supposées symétriquement distribuées autour de l'axe Oy de la voûte, nous borner à en considérer une portion comprise entre les deux plans méridiens $O_0 x_1$, $O_0 x_2$ symétriquement placés par rapport au méridien principal $O_0 x_0$ et formant l'angle $d\theta$.

Cette portion forme une voûte ordinaire ayant pour têtes les deux plans méridiens dont il vient d'être parlé.

Elle diffère toutefois des voûtes en berceau considérées au Chapitre précédent :

1° Parce que les têtes n'en sont pas parallèles;

2° Parce que, sur ces têtes, s'exercent des pressions normales. Les pressions égales entre elles (par raison de symétrie) qui

s'exercent sur les deux faces latérales ou méridiennes d'un voussoir compris entre deux joints infiniment voisins se composent, comme nous l'avons d'ailleurs déjà vu (§ 539), en une force horizontale que nous appellerons $q'd\theta$, située dans le plan du méridien principal.

Toutefois, il importe d'observer qu'ici ces actions ne s'exercent pas sur la totalité de la voûte en onglet que nous considérons.

Nous avons vu en effet (§ 547) que, dans les surfaces métalliques et par suite (§ 551) dans les coupoles métalliques, il existe en général un point où $q' = 0$; qu'au-dessus de ce point, q' est une pression et, au-dessous, une tension. Pour les coupoles sphériques, métalliques et d'épaisseur constante soumises uniquement à leur propre poids, ce point est distant du sommet d'un arc d'environ $51^\circ 49'$.

Convenons d'appeler ce point le *point neutre,* et le parallèle qui lui correspond le *parallèle neutre.* Ce parallèle n'est ni tendu ni comprimé.

§ 570.

COURBES DES PRESSIONS. LEUR DEGRÉ D'INDÉTERMINATION. — Ici, à l'encontre de ce qui se passe pour les coupoles métalliques, les joints ne résistent pas à des tensions; il s'ensuit que la portion de la voûte située au-dessus du point neutre *supporte seule les pressions* horizontales $q'd\theta$, tandis que la portion inférieure ne supporte *aucune action sur ses deux* têtes et se trouve, sauf l'inclinaison de ses plans de tête, exactement dans le cas d'une voûte ordinaire.

Il en résulte une tout autre répartition des pressions et, pour le point neutre, une position également autre que celle qui existerait dans une coupole métallique de même forme. Il faut déterminer la nouvelle position de ce point.

La partie de la voûte comprise entre ce point et le joint de naissance ne supportant pas d'action sur ses têtes et étant, par suite, de tous points assimilable à une voûte en berceau ordinaire, sa courbe des pressions ne peut être qu'une courbe funiculaire des charges agissantes, tandis que la courbe des pressions de la partie

supérieure peut, sans que les conditions statiques d'équilibre cessent d'être satisfaites, être prise à volonté à l'intérieur de la voûte.

Ainsi, soit *pq* le joint qui correspond au point neutre. Divisons la portion de voûte A_0B_0pq en un certain nombre de voussoirs par les joints β_0, β_1, β_2, β_3, et le surplus de la voûte par les joints β_4, β_5, ..., β_{10}, β_n.

Observons que, dans les coupoles, il n'y a pas de poussée à la clef, puisque la voûte, à sa partie supérieure, se termine par une simple arête A_0B_0 ou surface nulle. Or une pression finie, s'exerçant sur une surface nulle, donne une résultante nulle.

Si la voûte était ouverte, c'est-à-dire terminée par un cône $A'_0B'_0$ supportant un belvédère, le même raisonnement subsisterait à la clef de ce dernier. Ainsi, il n'y a pas de poussée à la pointe de la voûte en onglet que nous considérons.

Cela posé, portons (*fig. c*), à partir d'un point *a*, les poids 1, 2, 3, ..., 11 des voussoirs successifs depuis le sommet avec leurs surcharges.

Considérons d'abord les trois premiers, c'est-à-dire ceux placés au-dessus du joint neutre *pq*.

La pression exercée sur un joint quelconque β_2 de cette portion de voûte se compose :

1° Du poids de la partie de voûte située au-dessus de ce joint;

2° Des forces horizontales $q'd\theta$ résultant des pressions qui s'exercent sur ses deux têtes. Ce sont elles qui maintiennent l'équilibre, *malgré l'absence d'une poussée proprement dite au sommet*.

Traçons à l'intérieur de la voûte, entre les joints A_0B_0 et *pq*, une courbe entièrement arbitraire $\beta_0\sigma_0$.

On pourra statiquement la prendre comme courbe des pressions, c'est-à-dire comme courbe enveloppe des pressions exercées sur les joints. En effet, par le point *a* (*fig. c*), menons une horizontale indéfinie *a*O; par le point 1.2, menons une parallèle à la tangente en β_1 (*fig.* C) à la courbe tracée $\beta_0\sigma_0$ jusqu'à sa rencontre en 1′ avec l'horizontale *a*O. La partie de voûte comprise entre A_0B_0 et le joint β_1 sera en équilibre sous l'action de son poids représenté

(*fig. c*) par 1 et d'une pression horizontale $a1'$ représentant la résultante des forces $q'\,d\theta$ comprises entre A_0B_0 et β_1.

De même si, par les points 2.3, 3.4 du polygone des forces, on mène respectivement des parallèles aux tangentes à la courbe $\beta_0\sigma_0$, en β_2, β_3, σ_0, on obtient des pressions sur ces joints statiquement admissibles et, en outre, les valeurs correspondantes des résultantes des forces $q'\,d\theta$ qui sont $a2'$, $a3'$, aO.

Passons à présent à la partie pqA_nB_n de la voûte.

Dans cette partie, les forces $q'\,d\theta$ n'existent plus, parce que, dans cette partie, ces forces seraient, par hypothèse, des tensions et la voûte n'en peut pas supporter; donc la pression sur un joint quelconque tel que β_7 se compose : 1° de celle exercée sur pq; 2° du poids de la portion de voûte comprise entre pq et le joint β_7.

La première de ces forces est représentée sur le polygone des forces par $O\sigma$, parallèle à la tangente en σ_0 (*fig.* C); la seconde par σh (poids des voussoirs compris entre σ_0 et le joint β_7 que l'on considère).

Donc la pression sur ce joint est représentée par le rayon vecteur Oh issu du point *fixe* O. Donc le polygone de ces pressions fait partie d'un des polygones funiculaires des charges représentées sur le polygone des forces ab et ayant O pour pôle et, si l'on supposait des joints continus, ce serait une partie de la courbe funiculaire de ces charges continues relative au pôle O.

Supposons que la courbe $\sigma_0\beta_n$ tracée en trait plein (*fig.* C) représente cette courbe funiculaire. Elle est nécessairement tangente en σ_0 à la courbe $\beta_0\sigma_0$ adoptée comme courbe des pressions dans la partie supérieure; car, si l'on regarde le joint pq comme appartenant à la partie A_0B_0pq de la voûte, la pression qu'il supporte est, par hypothèse, tangente à la courbe $\beta_0\sigma_0$; si on le regarde comme appartenant à la partie inférieure, sa pression, d'après les propriétés des polygones des pressions ou courbes funiculaires, est tangente à la courbe des pressions $\sigma_0\beta_n$. Donc cette dernière courbe est tangente à la première en σ_0.

On peut, d'après cela, voir quel est le degré d'indétermination des pressions qui s'exercent sur une coupole quand on se borne à invoquer les conditions d'équilibre fournies par la Statique. Elle est bien plus grande que pour les voûtes ordinaires.

Dans ces dernières, en effet, on sait que le polygone des pressions est un des polygones funiculaires des charges données, ce

qui ne laisse, dans le cas de charges symétriques, que deux quantités arbitraires.

Ici l'on a une première inconnue, à savoir la position du joint *pq* répondant au point neutre. Ce point, en effet, est déterminé dans une surface flexible (§ 547) et aussi (§ 551) dans une coupole métallique simplement appuyée; mais ici les joints ne résistant plus à des tensions, le mode de répartition des forces élastiques se trouve complètement modifié et ce joint n'est pas connu *a priori*.

Une fois qu'on l'a trouvé, la courbe $\beta_0 \sigma_0$ est elle-même entièrement arbitraire.

Cette courbe et le joint *pq* admis, la courbe funiculaire $\sigma_0 \beta_n$ s'ensuit par la triple condition d'être tangente en un point donné σ_0 à une courbe donnée $\beta_0 \sigma_0$ et d'avoir son pôle O sur une droite donnée *a*O.

§ 571.

APPLICATION DU PRINCIPE DE L'ÉQUILIBRE LIMITE. — Mais, comme pour les voûtes en berceau, il nous suffit de déterminer les pressions qui répondent à l'état d'équilibre-limite (ou, dans certains cas, aux états en nombre fini d'équilibre-limite). D'après leur forme habituelle, les coupoles tendent à s'ouvrir à l'intrados dans leur partie supérieure, à l'extrados vers les reins et de nouveau à l'intrados vers les naissances.

Si un joint est sur le point de s'ouvrir à l'intrados, nous savons que son centre de pression est en son tiers extérieur; s'il est sur le point de s'ouvrir à l'extrados, son centre de pression est au tiers intérieur.

Dans les voûtes en berceau, trois joints seulement peuvent être simultanément sur le point de s'ouvrir, puisque trois conditions définissent la courbe des pressions. Ici, toute une partie de cette courbe vers le sommet étant arbitraire, une infinité de joints (tous ceux supérieurs à *pq*) peuvent être sur le point de s'ouvrir en même temps. Donc, dans cette partie de la voûte, la courbe des pressions $\beta_0 \sigma_0$ répondant à l'équilibre-limite n'est autre que celle qui passe par les tiers extérieurs des joints, et alors la courbe funiculaire $\sigma_0 \beta_n$ doit :

1° Être tangente à $\beta_0 \sigma_0$ en un point indéterminé σ_0;

2° Passer, en général, au tiers extérieur β_n du joint de naissance, ou être tangente en un point indéterminé à la courbe $\alpha_0\alpha_n$, lieu des tiers intérieurs des joints;

3° Avoir son pôle O sur l'horizontale aO menée par l'origine a du polygone des forces.

Ces trois conditions la déterminent complètement.

En général, aucune des courbes funiculaires tangentes à $\beta_0\beta_n$ ne vient toucher $\alpha_0\alpha_n$, et la courbe des pressions limites, d'abord tangente à $\beta_0\beta_n$, se rapproche de $\alpha_0\alpha_n$ pour s'en éloigner de nouveau et revenir au point β_n, ce qui détermine à la fois cette courbe et le point σ_0 ou le joint pq.

§ 572.

MARCHE A SUIVRE DANS LA PRATIQUE. — 1° Divisez (*fig.* C, *Pl. XLIII*) la section méridienne $A_0B_0A_nB_n$ en un certain nombre de voussoirs réels ou fictifs par les joints $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{10}$, A_nB_n, normaux à l'intrados.

2° Déterminez les poids de ces voussoirs.

D'après le théorème de Guldin, le poids d'un voussoir $aba'b'$ est, en appelant Π le poids spécifique de la maçonnerie et ξ la distance à l'axe Oy du centre de gravité du trapèze $aba'b'$,

$$\Pi \times \text{aire } aba'b' \times \xi\, d\theta,$$

et, comme on supprime le facteur $d\theta$ commun à toutes les forces, sauf à le rétablir là où il y a lieu dans le résultat final, c'est

$$\Pi \times \text{aire } aba'b' \times \xi.$$

3° Déterminez de même les poids des surcharges, s'il y en a, et notamment le poids de la surcharge qui pèserait sur le joint supérieur $A'_0B'_0$ si ce joint n'était pas sur l'axe et s'il supportait une construction.

4° Portez ces forces à une échelle convenue sur un polygone des forces ab (*fig. d*). Soient 1, 2, 3, ... ces forces qui pourraient ne pas être verticales.

5° Tracez sur la *fig.* C les courbes $\beta_0\beta_n$ et $\alpha_0\alpha_n$, lieux des tiers extérieurs et intérieurs des joints.

6° Tracez sur cette même figure les lignes d'action des charges. Elles ne passent pas par les centres de gravité des aires des voussoirs. Elles sont un peu plus éloignées de l'axe. Il suffit, en général, de les faire passer par ces centres de gravité, leur détermination exacte étant assez laborieuse (1).

7° Prenez sur l'horizontale du point a un pôle arbitraire O_0 et tracez le polygone funiculaire relatif à ce point en partant du point β_n. Soit $\beta_n s_0$ ce polygone que, sur la figure, on a remplacé par une courbe.

8° Cherchez sur cette courbe un point t_0, tel qu'en menant la verticale $t_0\sigma_0$ jusqu'à sa rencontre en σ_0 avec la courbe $\beta_0\beta_n$, les tangentes aux deux courbes en t_0 et σ_0 se coupent sur l'horizontale $O\beta_n$.

Pour résoudre ce problème, on peut employer la méthode suivante, due à Eddy.

Par les points où les lignes d'action 1, 2, 3, ... des forces coupent la ligne $\beta_0\beta_n$, menez des horizontales que vous prolongez jusqu'à une droite arbitraire. Ici l'on a pris la droite $O_0 b$ (*fig. d*).

Par les points d'intersection, menez des verticales.

Par les sommets du polygone funiculaire, menez des horizontales jusqu'à leurs rencontres avec les verticales correspondantes qui viennent d'être tracées.

Le lieu des points d'intersection ainsi obtenus forme une courbe passant par le point β'_n où l'horizontale de β_n coupe $O_0 b$.

Par le point β'_n, menez une tangente à cette courbe. Soit t'_0 le point de contact. La verticale du point t'_0 coupe la droite $O_0 b$ en σ'_0 et l'horizontale $O\beta_n x$ en un point ξ_0.

---

(1) Soient r le rayon de giration de l'aire $aba'b'$ définissant un voussoir, par rapport à l'axe vertical passant par le centre de gravité de cette aire; ξ la distance de ce point à l'axe Oy; ξ' la distance, à ce même axe, du centre de gravité exact du voussoir.

On peut démontrer que

$$\xi' = \xi + \frac{r^2}{\xi} = \xi\left(1 + \frac{r^2}{\xi^2}\right).$$

Le rapport $\frac{r^2}{\xi^2}$ est très petit.

Si l'on amplifie les ordonnées du polygone $\beta_n s_0$ dans le rapport

$$\frac{\xi_0 \sigma'_0}{\xi_0 t'_0},$$

on aura le polygone funiculaire cherché.

Les points t_0 et σ_0 sont respectivement sur les horizontales t'_0 et σ'_0.

Pour avoir un sommet quelconque 5 du nouveau polygone, il suffit de prolonger l'horizontale du sommet correspondant 5_0 du polygone $\beta_n s_0$ jusqu'à sa rencontre avec la droite $\beta'_n t''_0$ en 5_1; de mener par ce point une verticale jusqu'à sa rencontre en 5_2 avec $b O_0$, de mener enfin l'horizontale de 5_2 jusqu'à son intersection avec la verticale 5_0.

On peut aussi, si on le préfère, chercher la distance polaire de ce nouveau polygone.

Il suffit, pour cela, de réduire la distance polaire $O_0 a$ (*fig. d*) dans le rapport

$$\frac{\xi_0 t'_0}{\xi_0 \sigma'_0}.$$

A cet effet, on porte (*fig. C*) sur la verticale de O une longueur OO'_0 égale à la distance polaire $a O_0$; par le point O'_0 on mènera une horizontale jusqu'à sa rencontre en K avec $b O_0$. On mène la verticale de ce point qui coupe la tangente bt'_0 en K′ et l'horizontale $O\beta_n$ en K″. La nouvelle distance polaire est K′K″. Le pôle du polygone des pressions limites, c'est-à-dire du polygone funiculaire des charges données passant par β_n et tangent à $\beta_0 \beta_n$ est le point O (*fig. c*), tel que $Oa = K'K''$.

9° Pour que la voûte soit stable, il faut que la partie $\beta_n \sigma_0$ de ce polygone ne sorte pas du tiers moyen de la voûte, ne coupe aucun joint sous un angle moindre que le complément de l'angle du frottement de la pierre sur elle-même.

10° Les pressions exercées sur les joints inférieurs à celui σ_0 sont données par les rayons polaires issus de O.

11° Celles exercées sur les joints supérieurs à celui σ_0 sont données par les portions des parallèles aux tangentes à $\beta_0 \sigma_0$ comprises dans l'angle droit Oab, menées par les points de division des forces et aboutissant aux points 1′, 2′, 3′, ...

On peut donc chercher les composantes normales de ces diverses pressions et vérifier (§ 552) si la pression maxima par unité de surface, qu'on veut faire supporter à la pierre, n'est nulle part dépassée.

12° Cette dernière opération donne aussi les pressions q' exercées sur les faces méridiennes au-dessus du point σ_0. (Au-dessous de ce point ces faces ne supportent pas de pressions.) Les points d'application des forces q' étant aux tiers extérieurs des faces sur lesquelles elles agissent, la pression maxima qu'elles font naître (§ 552) par unité de surface est double de la pression moyenne. Ainsi, si q_2 est la pression obtenue sur la face méridienne du voussoir $aba'b'$, il faut que

$$\frac{q_2}{aba'b'} \leq \frac{1}{2}p_0,$$

p_0 étant la pression par unité de surface qu'on ne veut pas dépasser.

Si ces conditions ne sont pas remplies, il faut renforcer la voûte ou la soulager par des évidements.

§ 573.

CULÉES EN TOUR RONDE. — Une coupole métallique demeure en équilibre quand elle est simplement posée sur un plan horizontal, parce qu'elle résiste par elle-même aux tensions que subissent ses parallèles inférieurs.

Une coupole en maçonnerie n'étant pas dans le même cas, elle doit être posée sur une culée en tour ronde pouvant supporter la pression représentée par Ob (*fig. c*) qui se produit aux naissances.

Les parallèles de la tour ronde tendent eux-mêmes à s'ouvrir puisqu'on ne tient pas compte de l'adhérence dans les sections méridiennes de cette tour.

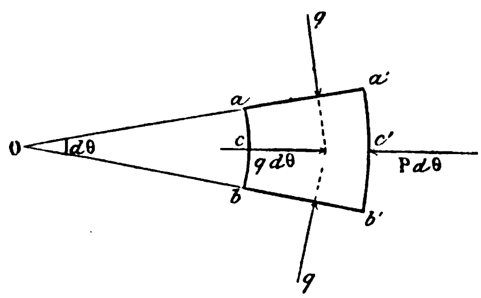
On opérera sur le secteur d'angle $d\theta$ qui forme culée de la portion de voûte considérée, comme sur la partie inférieure de cette voûte et comme sur les culées des voûtes ordinaires, c'est-à-dire qu'on prolongera la courbe funiculaire $\sigma_0\,\beta_{\prime\prime}$, ou le polygone

qui en tient lieu, à l'intérieur de la culée, et l'on vérifiera si elle ne sort nulle part du tiers moyen des sections horizontales qu'on peut y faire.

§ 574.

REMARQUE SUR LES TOURS RONDES COMPRIMÉES SYMÉTRIQUEMENT. — Si une tour ronde en maçonnerie est comprimée symétriquement (comme cela a lieu, par exemple, pour les cuves de gazomètres) et si sa courbure est prononcée, on peut lui donner une épaisseur moindre qu'à un mur de soutènement. Soit (*fig.* 14) $aba'b'$ la section horizontale d'un secteur d'angle infiniment petit $d\theta$.

Fig. 14.



Divisons-le en assises horizontales. Soient $P_0\,d\theta$ le poids vertical que porte une assise $aba'b'$ et $P\,d\theta$ la résultante des pressions horizontales agissant au-dessus d'elle.

S'il s'agissait d'un simple mur, il faudrait que la résultante des forces P_0 et P coupât l'assise dans son noyau central, soit sensiblement dans le tiers moyen de sa ligne médiane.

Mais ici les méridiens aa' et bb' donnent lieu à deux pressions égales q fournissant une résultante $q\,d\theta$ opposée à la pression $P\,d\theta$.

Donc il suffit ici que la résultante du poids P_0 et de la force $P - q$ passe au tiers moyen de la ligne médiane du trapèze $aba'b'$.

D'après cela, pour vérifier la stabilité, on peut procéder ainsi :

1° Divisez le prisme projeté en $aa'bb'$ en un certain nombre d'assises.

2° Sans vous occuper de la pression horizontale donnée $P\,d\theta$, cherchez, ce qui est facile graphiquement, la pression horizontale $P'\,d\theta$ qu'il faudrait appliquer sur la surface projetée en *ab* pour que, dans chaque assise, la résultante du poids total qui la surmonte et de la pression $P'\,d\theta$ passe exactement au tiers intérieur de la ligne cc'.

Cela fait,

3° Si $P < P'$, la stabilité est assurée, puisqu'elle le serait même si la contre-pression $q\,d\theta$ n'existait pas, c'est-à-dire si le pilier $ad'bb'$ existait seul.

Si $P > P'$, l'équilibre-limite n'est assuré que si cette contre-pression q atteint partout la valeur

$$q = P - P'.$$

Cela exige, si h est la hauteur des assises, $bb' = e$ l'épaisseur de la tour au droit de cette assise, que, comme à la fin du paragraphe précédent, on ait partout

$$\frac{q}{h \times e} \leq \frac{1}{2} p_0$$

ou

$$\frac{P - P'}{h \times e} \leq \frac{1}{2} p_0.$$

Là où cette condition ne sera pas satisfaite, on devra augmenter l'épaisseur e de la maçonnerie de façon à y satisfaire.

DEUXIÈME SECTION.

POUSSÉE DES TERRES ET DES FLUIDES. MURS DE SOUTÈNEMENT.

CHAPITRE III.

POUSSÉE DES TERRES.

§ 575.

PRINCIPES GÉNÉRAUX. — Nous considérerons un massif de terre limité par une surface cylindrique ou prismatique à arêtes horizontales soumis à l'action de son propre poids et de pressions constantes le long de chaque arête, constantes ou variables d'une arête à l'autre du cylindre terminal.

Les pressions intérieures sont, par suite, aussi les mêmes tout le long d'une parallèle aux arêtes de ce cylindre, de sorte qu'il suffit de considérer une portion du massif comprise entre deux sections droites, écartées l'une de l'autre d'une longueur égale à l'unité.

On admet, avec Coulomb, que si n et t sont respectivement les composantes normale et tangentielle de la pression rapportée à l'unité de surface qui s'exerce sur un élément superficiel placé à l'intérieur du massif, pour que celui-ci soit en équilibre, il faut et il suffit qu'on ait

$$(1) \qquad t \leq fn + \gamma,$$

f et γ étant deux coefficients dépendant de la nature des terres; le premier se nomme, comme pour les solides en contact, le *coefficient de frottement* de la terre considérée, le second représente la *cohésion* de cette terre.

Si l'on considère à l'intérieur du massif une aire plane finie de

grandeur S et qu'on nomme dS un élément de cette aire, on tire de (1), en multipliant par dS et intégrant dans l'étendue de l'aire S,

$$\int t\, dS \leq f \int n\, dS + \gamma S.$$

Or, en appelant $\mathfrak{N}$ et $\mathfrak{T}$ les composantes normale et tangentielle de la pression totale exercée sur l'aire S, quelles que soient les directions des forces $t\, d$S, leur résultante $\mathfrak{T}$ est moindre que leur somme arithmétique ou, au plus, égale à cette somme, c'est-à-dire que

$$\mathfrak{T} \leq \int t\, dS.$$

Par suite

$$\mathfrak{T} \leq f \mathfrak{N} + \gamma S,$$

ou

$$\frac{\mathfrak{T}}{S} \leq f \frac{\mathfrak{N}}{S} + \gamma, \tag{2}$$

qui généralise l'inégalité (1) et montre que, dans un massif en équilibre, l'action tangentielle moyenne par unité de surface exercée sur une aire plane de grandeur quelconque doit être moindre ou au plus égale au produit du coefficient de frottement par l'action normale moyenne par unité de surface exercée sur cette aire, plus la cohésion.

Si, pour un élément plan, on a

$$t = fn + \gamma, \tag{3}$$

les deux parties du massif situées de part et d'autre de cet élément sont *sur le point* de glisser.

Si l'on peut faire, dans le massif, une section plane ou courbe ab (*fig.* 1, *Pl. XLII*) le divisant en deux parties (A) et (B) telles que, pour chacun des éléments qui la composent, l'égalité (3) soit satisfaite, cette section prend le nom de *surface de glissement.*

Si PQ est la section droite du massif et ab celle d'un cylindre de même longueur que le massif, la courbe ab se nomme *une ligne de glissement.*

Théorème I. — *Pour qu'une ligne droite soit ligne de glissement, il faut et il suffit que, pour cette ligne, l'inégalité* (2)

se change en égalité, c'est-à-dire que

$$(4) \qquad \frac{\mathfrak{T}}{S} = f\frac{\mathfrak{N}}{S} + \gamma.$$

La condition est nécessaire; car, si pour chaque élément de la surface on a

$$(5) \qquad t = fn + \gamma,$$

en multipliant par l'élément de surface dS et intégrant, on obtient l'équation (4).

Réciproquement, celle-ci ne peut avoir lieu que si celle (5) est satisfaite pour tous les éléments de la droite considérée; car, si pour un seul on avait

$$t < fn + \gamma,$$

comme pour tous les autres, t est aussi plus petit ou au plus égal à $fn + \gamma$, en multipliant toutes ces inégalités ou égalités par dS ainsi que l'inégalité ci-dessus et faisant la somme des deux membres, on aurait nécessairement

$$\mathfrak{T} < f\mathfrak{N} + \gamma S$$

ou

$$\frac{\mathfrak{T}}{S} < f\frac{\mathfrak{N}}{S} + \gamma,$$

et l'on ne pourrait pas avoir l'égalité (4).

§ 576.

ÉQUILIBRE-LIMITE. — Si, par chaque point de la section droite d'un massif, il passe une ligne de glissement ab (*fig.* 1, *Pl. XLII*), de sorte qu'il existe une série de courbes ab, a_1b_1, a_2b_2 remplissant tout le massif et telles que celui-ci soit sur le point de glisser le long de chacune de ces courbes, le massif est en *équilibre-limite*.

Dans ce qui suit, nous ferons abstraction de la cohésion, ce qui est *défavorable* à la *consistance* du massif, et par suite, si nous trouvons qu'un massif, abstraction faite de la cohésion, est en équilibre, il sera, à plus forte raison, en équilibre si elle intervient.

La cohésion est très variable, pour une nature donnée de terre, avec les circonstances atmosphériques, avec la consistance qu'on lui a donnée artificiellement par le damage, consistance que le temps peut modifier; c'est pourquoi il est prudent d'en faire abstraction.

Les résultats obtenus sont aussi beaucoup plus simples et d'une application plus facile.

Faisant donc $\gamma = 0$, l'équilibre des terres exigera que, pour chaque élément superficiel, on ait

$$t \leq fn \tag{6}$$

ou, pour chaque aire plane finie,

$$\mathfrak{T} \leq f\mathfrak{N}, \tag{6'}$$

$\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{N}$ étant les composantes tangentielle et normale de la pression totale exercée sur l'aire considérée.

Cette seconde inégalité, d'après ce qui vient d'être établi, comprend la première comme cas particulier.

Si l'on pose

$$f = \tang\varphi,$$

φ prend, comme pour les solides, le nom d'*angle du frottement*. et les inégalités (6) et (6′) signifient ceci :

Théorème II. — *Pour qu'un massif de terre sans cohésion soit en équilibre, il faut et il suffit que la pression totale que subit un élément plan quelconque pris dans son intérieur fasse avec la normale à cet élément un angle moindre ou au plus égal à l'angle du frottement.*

En chaque point d'une surface de glissement, la pression fait avec la normale à la surface un angle égal à l'angle du frottement.

Enfin, le théorème I, pour les terres sans cohésion, est remplacé par celui-ci :

Théorème III. — *Pour qu'une ligne droite soit ligne de glissement, il faut et il suffit que la résultante des pressions qu'elle subit fasse avec sa normale un angle égal à l'angle de frottement.*

§ 577.

TALUS NATUREL. — THÉORÈME IV. — *Pour qu'un massif de terre sans cohésion soit en équilibre, il est nécessaire qu'une corde quelconque du périmètre de sa section droite et, par suite, aussi une tangente quelconque à ce périmètre fassent avec l'horizontale un angle moindre ou au plus égal à l'angle du frottement.*

En effet, soient (*fig.* 2, *Pl. XLII*) ACB la section droite d'un massif et *ab* une corde quelconque de cette section.

La portion *aCb* du massif est en équilibre sous l'action :

1° De son poids;

2° De la résultante des pressions exercées sur *ab* par la terre placée au-dessous de cette ligne.

Donc, ces deux forces sont égales et opposées; et, comme la première est verticale, il en est de même de la seconde.

Donc, l'angle que la normale à *ab* fait avec la verticale est moindre ou au plus égal à l'angle du frottement ou, ce qui revient au même, l'inclinaison de *ab* sur l'horizontale est moindre que cet angle ou lui est, au plus, égale.

Ce qui est vrai pour une corde *ab* quelconque est vrai pour une tangente *a' b'* considérée comme limite des positions de la corde *ab* se déplaçant parallèlement à elle-même jusqu'à ce que ses deux extrémités coïncident.

COROLLAIRE. — *Si un massif est terminé par une face plane ou, comme on dit, par un* talus plan, *l'inclinaison de ce talus est nécessairement moindre ou au plus égale à l'angle de frottement.*

Si le massif est en équilibre-limite dans le voisinage d'un talus, celui-ci ne peut être qu'un plan incliné sur l'horizon d'un angle égal à l'angle du frottement.

L'expérience confirme ce résultat; elle montre qu'en effet des terres fraîchement remuées, de faible cohésion, se mettent en

équilibre sous un talus ayant cette inclinaison. C'est pourquoi il prend le nom de *talus naturel des terres.*

Cette propriété permet de trouver expérimentalement l'angle du frottement d'une terre de nature donnée, pourvu qu'elle soit sans cohésion.

§ 578.

OBJET DU PROBLÈME DE LA POUSSÉE DES TERRES. — D'après cela, si un massif est limité par un talus plus raide que le talus naturel, il faut le soutenir le long de ce talus.

Le mur contre lequel il est appuyé se nomme un mur de *soutènement.*

La résultante des pressions exercées contre une portion quelconque du mur se nomme la *poussée des terres* contre cette portion du mur.

Le problème que nous nous proposons de résoudre a pour objet :

1° La détermination de la poussée en grandeur, direction et sens contre une portion quelconque d'un mur;

2° La détermination des dimensions à donner au mur pour qu'il puisse supporter cette poussée.

§ 579.

INDÉTERMINATION DU PROBLÈME. — Soit (*fig.* A, *Pl. XLII*) AB la face postérieure d'un mur ABCD soutenant un massif limité par le périmètre $AE_0F_0H_0K_0$ dont les talus sont moins inclinés que le talus naturel.

Soit A*b* une portion quelconque du mur; il s'agit de déterminer la poussée exercée sur A*b*.

A cet effet, par le point *b*, faisons dans le massif une section *b*X faisant avec la verticale *bz* un angle *arbitrairement choisi i.*

Le prisme $bAE_0F_0H_0X$ est en équilibre sous l'action :

1° De son poids qui est connu et que nous appelons Q;

2° De la réaction de la face A*b* du mur. Soit R_0 cette force égale

et contraire à la poussée que nous cherchons et soit ψ_0 son inclinaison sur la normale à Ab;

3° De la résultante des pressions que les terres inférieures exercent sur celles qui sont au-dessus d'elles le long de la section bX.

Soit R cette force et ψ son inclinaison sur la normale à bX.

Ces trois forces doivent donc concourir en un même point et leur polygone des forces qui est un triangle doit se fermer.

Supposons, pour un instant, connus les angles ψ_0 et ψ, c'est-à-dire les directions des forces R et R_0. Alors il est aisé de trouver leurs grandeurs, et, en particulier, la grandeur de R_0 que nous cherchons.

Il suffit (*fig. a*) de construire, à une échelle quelconque, la force connue Q et de mener par ses extrémités les parallèles à R et R_0; les deux côtés du triangle ainsi obtenu fournissent les grandeurs de ces forces, et l'on a dans le triangle des forces

$$\frac{R_0}{Q} = \frac{\sin(R.Q)}{\sin(R.R_0)}. \tag{7}$$

Q est une fonction de l'angle i qu'on peut trouver dès que la ligne terminale du massif est définie; les angles qui entrent dans le second membre se déduiront eux-mêmes facilement des angles i, ψ, ψ_0 et de l'inclinaison donnée du mur AB sur la verticale.

Donc, on tire de la dernière équation

$$R_0 = F(i, \psi, \psi_0), \tag{8}$$

F étant une fonction connue.

La poussée R_0 et l'angle ψ_0 sont évidemment indépendants de l'angle de la section bX, c'est-à-dire de l'angle i; mais ψ est une certaine fonction de cet angle, soit

$$\psi = f(i). \tag{9}$$

Si l'on connaissait la fonction $f(i)$, en la portant à la place de ψ dans l'expression de R_0, l'angle i disparaîtrait du second membre, puisque, le premier membre étant indépendant de i, il en est de même du second.

On a donc identiquement, quel que soit i,

$$\frac{\partial F}{\partial i} + \frac{\partial F}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial i} = 0.$$

ou

$$\frac{\partial F}{\partial i} + \frac{\partial F}{\partial \psi} f'(i) = 0 \tag{10}$$

Puisque l'équation (8) fournit R_0, quelle que soit la section bX, adoptons en particulier, parmi les sections issues du point b, celle bX_1 pour laquelle l'angle ψ atteint son maximum.

Soit ψ_1 cette valeur maxima de ψ et $i_1 = zbX_1$ la valeur correspondante de i.

On aura

$$\psi_1 = f(i_1),$$

et de plus, puisque ψ est maximum pour $i = i_1$,

$$f'(i_1) = 0.$$

En adoptant ces valeurs de i et ψ, les équations (8) et (10) deviennent

$$R_0 = F(i_1, \psi_1, \psi_0),$$
$$\frac{\partial F}{\partial i_1} = 0.$$

En éliminant i_1 entre ces deux équations, on aura R_0 en fonction des deux constantes ψ_0 et ψ_1.

Mais le résultat de l'élimination est le même si, au lieu de la lettre i_1, nous remettons la lettre i, de sorte qu'en écrivant les deux équations

$$\left\{\begin{aligned} & R_0 = F(i, \psi_1, \psi_0), \\ & \frac{dF}{di} = 0, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

R_0 s'obtient en éliminant i entre elles.

L'équation (8) exprimant qu'il y a équilibre entre les forces R_0, Q, R, la première des équations (11) exprime qu'il y a équilibre entre les forces R_0, Q et une force fictive R_1 qui ferait avec la normale à bX l'angle *constant* (quel que soit bX) ψ_1.

La seconde des équations (11) exprime que R_0 est la valeur maxima que peut acquérir la fonction F de la seule variable i.

Ainsi :

Théorème. — *Pour obtenir* rigoureusement *la grandeur de la poussée* R_0 *sur une portion quelconque* A*b d'un mur de soutènement plan, connaissant l'inclinaison* ψ_0 *de cette force sur la normale au mur, faites par le pied b une section b*X *d'inclinaison arbitraire i, supposez suivant b*X *non pas la réaction vraie qui s'y produit, mais une réaction fictive* R_1, *formant avec la normale à cette section l'angle constant* ψ_1 *égal à la plus grande inclinaison qui puisse acquérir la réaction vraie* R *lorsqu'on fait varier la section.*

Cherchez la poussée fictive que produirait sur le mur la force R_1.

Le maximum que peut atteindre cette poussée fictive lorsque l'angle i varie est la poussée vraie.

§ 580.

Application du principe de l'équilibre-limite. — La poussée se trouvera ainsi exprimée à l'aide des deux angles inconnus ψ_0 et ψ_1.

Il est impossible *a priori* de déterminer ces angles, de sorte que la poussée vraie ne peut pas être obtenue. Mais nous pouvons poser en ce qui touche les murs de soutènement un principe analogue à celui que nous avons déjà utilisé dans la théorie des voûtes. Il consiste en ceci :

Pour qu'un mur de soutènement soit stable, il suffit qu'il puisse résister à la poussée qu'il subit à l'instant où son équilibre et celui des terres qu'il supporte sont sur le point d'être rompus, c'est-à-dire à l'instant où le système tout entier formé par le mur et les terres est en équilibre-limite.

En effet, supposons qu'un mur de soutènement soit construit et qu'on l'abandonne à lui-même. S'il ne reste pas en équilibre, avant de tomber, le système tout entier passera par l'état d'équilibre-limite dont il vient d'être parlé.

Comme le mur atteindra cet état sans vitesse sensible, il ne le dépassera pas si, comme nous l'admettons, il peut résister aux

efforts qu'il supporte à ce moment-là. Cela résulte du sens même du mot *équilibre* (§ 1).

Au lieu de chercher la poussée vraie, nous nous bornerons donc à chercher la poussée produite lors de l'équilibre-limite, et il suffira de donner au mur les dimensions nécessaires pour qu'il puisse supporter cette poussée.

Or, dans l'état d'équilibre-limite, les terres sont sur le point de glisser le long du mur. De là, résulte la connaissance de l'angle ψ_0.

Soit, en effet, φ' l'angle du frottement des terres contre la maçonnerie. Il y a deux cas à considérer :

1° Si $\varphi' < \varphi$, à l'instant où le glissement de la terre contre la maçonnerie est sur le point de se produire, on aura

$$\psi_0 = \varphi'.$$

2° Si $\varphi' > \varphi$, ce qui a lieu généralement à cause des rugosités de la partie postérieure de la maçonnerie, on ne peut pas avoir $\psi_0 = \varphi'$.

Car, si l'on fait dans les terres une section parallèle à A*b* et infiniment voisine de cette ligne comme celle indiquée en pointillé, le long de cette section qui est à l'intérieur du massif, la réaction ne peut pas faire avec la normale à la section un angle supérieur à φ. Donc, si le long de A*b* l'angle analogue était φ', la réaction qui se produit changerait brusquement de direction en passant de A*b* à une surface infiniment voisine, ce qui est impossible. Donc, dans ce cas, on aura le long de AB non pas $\psi_0 = \varphi'$, mais $\psi_0 = \varphi$. Cela signifie qu'il n'y aura pas, comme dans le cas précédent, glissement direct des terres contre la maçonnerie. Une couche infiniment mince de terre restera adhérente à la maçonnerie et le glissement aura lieu le long de la face intérieure de cette couche de terre, c'est-à-dire le long de la ligne pointillée, de sorte qu'il y aura, en réalité, glissement de terre sur terre.

Ainsi, en résumé, si l'on appelle φ_0 le plus petit des deux angles φ et φ', on aura toujours

$$\psi_0 = \varphi_0,$$

et, dans la pratique, sauf dans le cas rare de murs à faces posté-

rieures très lisses, on aura

$$\varphi_0 = \varphi.$$

A présent, la portion considérée Ab du mur étant censée sur le point de se mouvoir, les terres tendront à suivre le mouvement. Une partie du massif tendra à se détacher du reste.

Coulomb admet, et cela est assez bien confirmé par l'expérience, que la surface de glissement est plane.

Elle est donc définie par l'une des lignes bX issues de b. La valeur maxima ψ_1 que peut acquérir ψ a donc lieu suivant cette ligne et est égale à l'angle du frottement. Ainsi

$$\psi_1 = \varphi.$$

De là et du théorème du paragraphe précédent résulte le suivant, dont la seconde partie est due à Coulomb :

THÉORÈME. — 1° *La poussée* R_0 *sur une portion quelconque* Ab *d'un mur de soutènement fait avec la normale à ce mur un angle* φ_0 *égal au plus petit des deux angles* φ *et* φ' *du frottement de terre sur terre et de terre sur maçonnerie.*

2° *Pour l'obtenir en grandeur, cherchez, parmi tous les plans* bX *issus du point* b *et considérés comme des surfaces de glissement, celui* bX_1 *qui fournit, sur le mur, la poussée maxima.*

Ce sera la grandeur de R_0.

§ 581.

MÉTHODE GÉOMÉTRIQUE DE PONCELET. — Pour appliquer ce théorème, on devra (*fig.* B, *Pl. XLII*) :

1° Supposer, appliquée en un point de Ab qui sera déterminé plus loin, la force inconnue R_0 faisant avec la normale à Ab l'angle φ_0;

2° Faire une section quelconque bX et y supposer appliquée une force R_1 faisant avec la normale à bX l'angle φ;

3° Déterminer R_0 par la condition que ces deux forces fassent équilibre au poids Q du prisme de terre détaché par le plan bX;

4° Chercher la direction de bX pour laquelle R_0 devient maximum;

5° Déterminer la grandeur de ce maximum. Ce sera la valeur cherchée de R_0.

Pour obtenir ces résultats, nous emploierons la méthode graphique si simple et si élégante due à Poncelet.

Soient toujours (*fig.* B) AB la face postérieure du mur, et

$$AE_0F_0H_0K_0$$

le profil supérieur des terres.

Admettons, sauf vérification, que le plan de rupture bX_1, répondant à une portion quelconque bA du mur, rencontre ce profil suivant le talus E_0F_0.

THÉORÈME. — 1° *Par le point b menez une droite bO faisant avec la face postérieure bA du mur un angle $\varphi + \varphi_0$ (ce sera généralement 2φ) et prolongez cette ligne jusqu'à sa rencontre en O avec celle des lignes du talus qu'on a supposée être rencontrée par la ligne de rupture inconnue bX_1, c'est-à-dire ici avec la direction F_0E_0.*

2° *Par le point A, menez AA′ parallèle à bE_0 jusqu'à sa rencontre en A′ avec ce même talus, de sorte que, quel que soit le point X_1, le triangle $bA'X_1$ sera équivalent au quadrilatère bAE_0X_1.*

3° *Par le point A′ menez A′T parallèle au talus naturel des terres, c'est-à-dire formant avec l'horizontale l'angle φ, jusqu'à sa rencontre en T avec bO.*

4° *Décrivez une demi-circonférence sur bT comme diamètre et, par le point O, menez la tangente Ot à cette demi-circonférence.*

5° *Par un arc de cercle décrit du point O comme centre, rabattez le point de contact t en x_1 sur la ligne bO.*

Alors :

a. La poussée cherchée R_0 sur la portion Ab du mur est donnée par l'expression

$$R_0 = \frac{\Pi}{2}\overline{bx_1}^2 \times \sin A'TO, \tag{12}$$

Π étant le poids spécifique des terres et bx_1 étant mesuré sur l'épure à l'échelle des longueurs, c'est-à-dire à l'échelle du dessin du mur.

b. Pour avoir la direction bX_1 du plan de rupture, menez x_1X_1 parallèle au talus naturel des terres. Le point où cette ligne rencontre E_0F_0 est le point cherché X_1.

Remarque I. — Cette règle suppose, comme il a été dit, que le point X_1 est sur la ligne E_0F_0. Si X_1 rencontrait un autre talus, par exemple H_0K_0, il faudrait recommencer la construction en prenant les points O et A' sur le prolongement de K_0H_0, ce dernier étant choisi de façon que le triangle $bA'H_0$ fût équivalent à l'aire $bAE_0F_0H_0b$. (Le point A' se déterminerait alors suivant le procédé du § 15.)

Remarque II. — Si l'on ne veut pas mesurer, sur l'épure, l'angle OTA' qui entre dans la formule (12), il est aisé d'en avoir l'expression en fonction des données du problème.

Soit ε l'angle du mur bA avec la verticale bz; menons bT_0 parallèle au talus naturel, c'est-à-dire à A'T faisant, par suite, l'angle $\frac{\varpi}{2} - \varphi$ avec la verticale. On a

$$\text{OTA}' = \text{O}b\text{T}_0 = \varphi + \varphi_0 + \varepsilon + \frac{\varpi}{2} - \varphi = \frac{\varpi}{2} + \varphi_0 + \varepsilon.$$

Donc la formule (12) devient

$$R_0 = \frac{\Pi}{2}\overline{bx_1}^2 \cos(\varphi_0 + \varepsilon).$$

Si la face postérieure bA du mur, au lieu d'*avoir un fruit*, c'est-à-dire au lieu d'être inclinée vers les maçonneries, était inclinée vers les terres, il faudrait remplacer ε par — ε. Ainsi, on a

$$(12\ bis) \qquad R_0 = \frac{\Pi}{2}\overline{bx_1}^2 \cos(\varphi_0 \pm \varepsilon),$$

en prenant le signe supérieur ou le signe inférieur suivant que, comme sur la figure, bA a un fruit ou qu'au contraire il est incliné vers les terres.

Pour démontrer les propositions qui précèdent, soient bX un

plan quelconque considéré comme plan de rupture; R_1 la réaction faisant l'angle φ avec la normale à ce plan; Q le poids du prisme bAE_0Xb qui, par construction, est égal à celui du prisme triangulaire $bA'X$; R_0 la réaction du mur faisant l'angle φ_0 avec sa normale.

Construisons (*fig. b*) le triangle des trois forces Q, R_0, R_1.

Si, par le point X (*fig.* B), on mène une parallèle au talus naturel ou à A'T jusqu'à sa rencontre en x avec bO, le triangle Xxb est semblable à celui de la *fig. b*. En effet, si l'on fait tourner le premier de ces triangles d'un angle $\frac{\varpi}{2} - \varphi$, on voit que le côté xX devient vertical ou parallèle au côté Q du second, et le côté bX devient parallèle à R_1. Donc les deux triangles ayant deux angles égaux sont semblables; par suite,

$$\frac{R_0}{} = \frac{bx}{Xx}$$

ou

$$R_0 = Q \times \frac{bx}{Xx}.$$

D'ailleurs, Q étant le poids du prisme triangulaire $bA'X$, si de b on mène la hauteur $b\beta$ du triangle, on aura

$$Q = \frac{1}{2}\Pi . A'X . b\beta$$

et, par suite,

$$R_0 = \frac{\Pi . b\beta}{2} \frac{A'X \times bx}{Xx}.$$

Par le point A', menons une parallèle à bX jusqu'à sa rencontre en y avec bO.

Les deux triangles semblables OXb et OA'y donnent

$$\frac{A'X}{by} = \frac{OX}{Ob},$$

d'où

$$A'X = \frac{by}{Ob} OX,$$

D'autre part, les triangles semblables OXx et OA'T donnent

$$\frac{Xx}{A'T} = \frac{OX}{OA'}.$$

Par suite,

$$\frac{A'X}{Xx} = \frac{by}{Ob}\,\frac{OA'}{A'T}$$

et

$$R_0 = \frac{\Pi}{2}\,\frac{b\beta.OA'}{Ob.A'T}\,bx.by.$$

Mais $b\beta.OA'$ est le double de l'aire du triangle $OA'b$. Cette double aire est aussi représentée par

$$Ob.A'T \sin A'Tb.$$

Donc

$$\begin{aligned} b\beta.OA' &= Ob.A'T \sin A'Tb \\ &= Ob.A'T \sin A'TO, \end{aligned}$$

ou

$$\frac{b\beta.OA'}{Ob.A'T} = \sin ATO.$$

Par suite,

(13) $$R_0 = \frac{\Pi \sin A'TO}{2}\,bx.by.$$

Il s'agit de trouver la direction de bX pour laquelle R_0 est maximum, c'est-à-dire qu'il faut chercher le maximum du produit $bx.by$ ou le maximum de

$$(Ob - Ox)(Ob - Oy) = \overline{Ob}^2 - Ob(Ox + Oy) + Ox.Oy.$$

Le produit $Ox.Oy$ est constant, quelle que soit la direction bX.

En effet, les deux triangles semblables OxX et OTA' donnent

$$Ox = OX\,\frac{OT}{OA'}.$$

De même, les triangles semblables OyA' et ObX donnent

$$Oy = OA'\,\frac{Ob}{OX};$$

d'où

$$Ox.Oy = Ob.OT.$$

Le maximum du produit $bx.by$ répond donc au minimum de la somme

$$Ox + Oy.$$

Et comme le produit $Ox.Oy$ est constant, la somme sera mi-

nima pour

$$Ox = Oy.$$

La section bX_1 répondant au maximum de R_0 est donc celle pour laquelle les deux points x et y coïncident.

Soit x_1 le point avec lequel ils coïncident.

L'avant-dernière équation donne

$$(14) \qquad \overline{Ox_1}^2 = Ob.OT,$$

ce qui justifie la construction indiquée pour trouver le point x_1.

La ligne xX parallèle au talus naturel devient alors x_1X_1, ce qui justifie la construction indiquée pour trouver le point X_1.

Enfin l'expression (13) de R_0 devient, pour $bx = by = bx_1$,

$$R_0 = \frac{\Pi \sin A'TO}{2}\overline{bx_1}^2,$$

ce qui achève d'établir les règles énoncées.

Remarque. — Si, par le point b on mène bT_0 parallèle au talus naturel jusqu'à sa rencontre en T_0 avec le talus E_0F_0, que sur $A'T_0$ comme diamètre on décrive une demi-circonférence qu'on mène Ot_1 tangente à cette demi-circonférence et qu'on rabatte cette tangente autour de O jusqu'au talus $OA'F_0$, on retrouve le point X_1.

Car, de

$$\overline{Ox_1}^2 = OT.Ob,$$

on déduit facilement, à l'aide des triangles semblables de la figure,

$$\overline{OX_1}^2 = OA'.OT_0 = \overline{Ot_1}^2.$$

§ 582.

EXPRESSION ANALYTIQUE DE LA POUSSÉE. — Nous avons vu qu'on peut encore écrire

$$R_0 = \frac{\Pi \cos(\varphi_0 \pm \varepsilon)}{2}\overline{bx_1}^2.$$

Or

$$bx_1 = Ob - Ox_1 = Ob - \sqrt{Ob.OT}.$$

$$\overline{bx_1}^2 = Ob(Ob + OT - 2\sqrt{Ob.OT}).$$

Soit $\omega < \varphi_0$ l'inclinaison du talus $OA'F_0$ sur l'horizontale. Menons bO' parallèle à $OA'F_0$.

L'angle $O'bz$ est égal à $\frac{\varpi}{2} + \omega$.

Par suite

$$\widehat{O'bO} = bOA' = \frac{\varpi}{2} + \omega - \varepsilon - \varphi - \varphi_0.$$

Soit d'ailleurs

$$A'b = \zeta.$$

Dans le triangle $bA'O$, on a

$$\frac{Ob}{\zeta} = \frac{\sin bA'O}{\sin bOA'} = \frac{\sin(bOA' + ObA')}{\sin bOA'}$$

ou

$$Ob = \zeta \frac{\sin\left(\frac{\varpi}{2} + \omega - \varepsilon - \varphi - \varphi_0 + \varphi + \varphi_0\right)}{\sin\left(\frac{\varpi}{2} + \omega - \varepsilon - \varphi - \varphi_0\right)},$$

$$Ob = \zeta \frac{\cos(\omega - \varepsilon)}{\cos(\omega - \varepsilon - \varphi - \varphi_0)}.$$

Dans le triangle $bA'T$, on a

$$\frac{bT}{\zeta} = \frac{\sin TA'b}{\sin OTA'} = \frac{\sin\left(i + \frac{\varpi}{2} - \varphi\right)}{\sin ObT'},$$

$$bT = \zeta \frac{\cos(\varphi - i)}{\cos(\varphi_0 + \varepsilon)}.$$

Calculant Ob et bT par les dernières équations, on en tire OT et par suite $\overline{bx_1}^2$.

Il n'y aurait lieu de recourir au calcul que si le point O était hors des limites de l'épure.

§ 583.

CAS PARTICULIER D'UN TALUS UNIQUE. POINT D'APPLICATION DE LA POUSSÉE. — Soit (*fig.* 3, *Pl. XLII*) BA la face postérieure d'un mur soutenant un massif limité par le talus unique AT_0.

Ici le point A' coïncide avec A. Donc, pour avoir la pression exercée sur une portion Ab du mur, on mènera bO faisant avec bA l'angle $\varphi + \varphi_0$ (qui sera généralement 2φ), puis AT parallèle

au talus naturel qui est plus raide que AT_0. On décrira la demi-circonférence Tb, on mènera la tangente Ot qu'on rabattra en Ox_1.

La poussée sera

$$(15) \qquad R_0 = \frac{\Pi \sin ATO}{2} \overline{bx_1}^2.$$

Soit $bx_1 = x_1$ et soit x'_1 sa projection sur une normale au talus naturel. On aura

$$(15\ bis) \qquad R_0 = \frac{\Pi}{2} x_1 . x'_1.$$

On peut mesurer x_1 et x'_1 et faire le produit des nombres obtenus ou construire ce produit.

Si on fait la construction pour différents points b du mur, on reconnaît sans difficulté que bx_1 croît proportionnellement à la distance bA : donc, en vertu de (15), la poussée croît proportionnellement au carré de bA. Il en résulte que la poussée sur le mur entier AB est appliquée au tiers de sa hauteur à partir de son pied ou aux $\frac{2}{3}$ de AB à partir de A et que, généralement, la poussée sur Ab est appliquée aux $\frac{2}{3}$ de Ab à partir de A.

§ 584.

CAS PARTICULIER DU TALUS NATUREL ET D'UN MUR VERTICAL. — Supposons (*fig.* 4, *Pl. XLII*) que le talus AT_0 soit le talus naturel des terres, que le mur AB soit vertical et que son coefficient de frottement soit égal ou supérieur à celui des terres. Alors on devra prendre $\varphi_0 = \varphi$, c'est-à-dire que la poussée R_0 sera parallèle au talus AT_0.

Si l'on fait la construction générale, on voit que les points T et x_1 coïncident tous deux avec O. Par suite

$$R_0 = \frac{\Pi}{2} \sin AOb . \overline{bO}^2 = \frac{\Pi}{2} bO^2 . \cos\varphi = \frac{\Pi h^2}{2} \cos\varphi,$$

$h = Ab$ étant la hauteur du mur ou de la portion du mur considéré.

Remarque. — Soit un parallélogramme $AbA'b'$. On voit que

les réactions R_0 sur les faces verticales Ab, $A'b'$ sont égales et de sens opposés et se font équilibre.

Donc la réaction suivant bb' fait équilibre au poids du prisme $AbA'b'$. Elle est donc verticale et appliquée au milieu de bb'.

Le même raisonnement s'applique au parallélogramme $AbA''b''$.

Donc, si l'on considère le parallélogramme $A'b'A''b''$, on voit que la réaction sur l'élément $b'b''$ est verticale et fait équilibre au poids du prisme $A'b'A''b''$, et que les réactions sur les faces verticales $A'b'$ et $A''b''$ se font elles-mêmes équilibre et sont parallèles au talus AT.

MM. Rankine et Eddy admettent que, dans n'importe quel massif terminé par un talus AT_0 d'inclinaison quelconque et soutenu par un mur ayant aussi une inclinaison quelconque, un élément $b'b''$, parallèle au talus, supporte une réaction verticale; d'où ils concluent que l'action sur une face verticale est toujours parallèle au talus.

Il convient de regarder ce principe comme une pure hypothèse et elle est contraire au principe de l'équilibre-limite qui, à notre sens, constitue, dans l'état actuel de la Science, le guide le plus rationnel en cette matière.

§ 584 *bis*.

PLATE-FORME HORIZONTALE AVEC MUR VERTICAL LISSE. — Si l'on suppose une plate-forme horizontale et un mur vertical sans frottement, la réaction de ce mur sera horizontale, c'est-à-dire que, dans ce cas, il se trouve encore que la réaction sur un élément vertical est parallèle à la surface libre des terres. Mais cela ne serait pas vrai si le mur n'était pas supposé parfaitement lisse.

Si l'on fait la construction générale (*fig.* 5, *Pl. XLII*) pour le mur AB, on voit que les deux triangles OAB, OAT sont semblables et donnent

$$OT : OA :: OA : OB,$$

d'où

$$\overline{Ox_1}^2 = OT.OB = \overline{OA}^2,$$
$$Ox_1 = OA.$$

Pour avoir le point x_1, il suffit de mener BO faisant avec la ver-

ticale l'angle φ, c'est-à-dire de mener BO perpendiculaire au talus naturel, de décrire l'arc de cercle Ax_1 du point O comme centre et, par le point x_1, de mener x_1X_1 parallèle au talus naturel.

On aura

$$R_0 = \frac{\Pi}{2}\sin OAT \times \overline{Bx_1}^2,$$

ou

$$R_0 = \frac{\Pi}{2}\overline{Bx_1}^2 = \frac{\Pi}{2}(OB - OA)^2$$

ou

$$(16) \qquad R_0 = \frac{\Pi h^2}{2}\left(\frac{1}{\cos\varphi} - \tang\varphi\right)^2 = \frac{\Pi h^2(1-\sin\varphi)^2}{2\cos^2\varphi}.$$

On voit d'abord que les deux triangles OAx_1 et Ox_1X_1 sont égaux, que par suite BX_1 est parallèle à la corde x_1A, c'est-à-dire que la ligne de rupture BX_1 est parallèle à la bissectrice de l'angle TAB que fait le mur avec le talus naturel.

Cette propriété serait vraie, même si le mur AB n'était pas vertical, pourvu qu'il fût lisse.

§ 585.

CAS D'UNE SURCHARGE UNIFORME. — Soit (*fig.* 6, *Pl. XLII*) Ab un mur ou portion de mur d'inclinaison quelconque, lisse ou non, soutenant des terres limitées par un talus AT_0 sur lequel agit une pression uniforme qu'on peut toujours représenter par un massif de terre $AA'T_0T'_0$ de hauteur convenable.

Soit ω l'inclinaison du talus sur l'horizontale.

Faisons une section bX. Soit Q le poids $bAA'X'X$ de ce prisme avec sa surcharge.

Si nous menons la droite bO faisant l'angle $\varphi + \varphi_0$ avec le mur et la droite Xx parallèle au talus naturel, on verra, comme au § 581, que la réaction R_0 du mur est

$$R_0 = Q\frac{bx}{Xx}.$$

Si h_0 est la hauteur AA', en abaissant la perpendiculaire $b\beta$ sur le talus, on aura

$$Q = \frac{\Pi . b\beta}{2}AX + \Pi h_0 \cos\omega . AX,$$

d'où

$$R_0 = \frac{\Pi}{2} b\beta \left(1 + \frac{2h_0 \cos\omega}{b\beta}\right) \frac{bx.AX}{Xx}.$$

Il faut trouver le maximum de cette quantité lorsque le point X varie, ou le maximum du produit

$$\frac{bx.AX}{Xx},$$

qui est indépendant de la surcharge. Ainsi, dans le cas d'une surcharge uniforme, la ligne de rupture est la même que s'il n'y en avait pas et la présence de la surcharge augmente simplement la poussée dans le rapport

$$\left(1 + \frac{2h_0 \cos\omega}{b\beta}\right) : 1.$$

§ 386.

CAS D'UNE SURCHARGE QUELCONQUE. — Soit AB (*fig.* A, *Pl. XLIII*) un mur soutenant des terres limitées par un talus AT_0 ou par un profil quelconque. Si, sur ces terres, pèse une surcharge, on peut toujours la représenter par un poids de terre limité par un profil convenable $II'JJ'$.

Pour avoir la poussée sur une portion Ab du mur, menons une section quelconque bX. Soit Q le poids $bAII'X'Xb$ limité par cette section et l'ordonnée correspondante XX' de la surcharge. On peut réduire cette aire à une base déterminée Δ (§ 15), de sorte que le poids du massif $bAII'X'Xb$ soit

$$Q = \Pi\Delta . q,$$

q étant une longueur connue. Portons la longueur q sur une verticale quelconque, par exemple suivant as à partir d'un point fixe a (*fig. a*).

Par le point s menons une parallèle à la poussée du mur dont la direction est connue, puisqu'elle fait l'angle φ_0 avec le mur et par le point fixe a une parallèle à la réaction de la section bX, force dont la direction est également connue, puisqu'elle fait

l'angle φ avec la ligne bX. Soit S le point d'intersection des deux lignes ainsi tracées.

Pour diverses directions données à bX, on trouvera ainsi une courbe lieu des points S. On mènera la tangente verticale à cette courbe. Soit S_1 le point de contact. L'ordonnée $S_1 s_1$ correspondante, menée parallèlement à la poussée, représentera cette force à l'échelle adoptée pour les forces, c'est-à-dire qu'on aura

$$R_0 = \Pi\Delta \times S_1 s_1.$$

La section bX_1 qui a fourni le point s_1 sera la ligne de rupture.

§ 587.

POINT D'APPLICATION DE LA POUSSÉE SUR UN MUR PLAN. — Lorsqu'un massif est limité par un talus plan, la poussée contre un mur est appliquée (§ 583) au tiers de sa hauteur à partir de son pied.

Si le terrain n'est pas trop accidenté, on admet, en général, ce même point d'application. Mais, en tous cas, quelle que soit la surcharge, on peut trouver exactement le point d'application de la poussée.

Soit (*fig.* 7, *Pl. XLII*) AB un mur soutenant un massif quelconque AT_0.

Nous savons trouver en grandeur, direction et sens, la poussée R_0 sur une portion quelconque Ab du mur. Portons cette poussée en ordonnée à partir du point b et normalement à AB à une échelle des forces convenue. Soit bb' cette ordonnée. Le lieu des points b' forme une courbe $Ab'B'$. L'ordonnée $b_1 b'_1$ au point b_1 infiniment voisin de b représente la poussée totale sur Ab_1.

Donc la différence

$$b_1 b'_1 - bb' = \beta b'_1$$

représente en grandeur la pression sur l'élément bb_1 et le rapport

$$\frac{\beta b'_1}{bb_1},$$

c'est-à-dire le coefficient angulaire de la tangente à la courbe AB' en b' représente cette même pression rapportée à l'unité de longueur. Pour obtenir ce coefficient angulaire, on mènera la tan-

gente $b'k'$ et du point b' une parallèle à AB, sur laquelle on prendra une longueur arbitraire (un nombre simple d'unités); on mènera l'ordonnée kk' jusqu'à la tangente. On mesurera cette ordonnée à l'échelle des forces adoptée pour les ordonnées bb'; la longueur kk' est connue d'avance mesurée à l'échelle de la longueur du mur AB. On divisera le premier de ces nombres par le second.

Portons les quotients ainsi obtenus en ordonnées. On aura une nouvelle courbe $Ab''B''$. La projection du centre de gravité de l'aire $Ab''B''B$ sur le mur est le point d'application de la poussée cherchée, laquelle fait l'angle $\frac{\varpi}{2} - \varphi_0$ avec le mur et est connue en grandeur.

§ 588.

SUR L'ACTION QUE SUPPORTE UNE SECTION VERTICALE D'UN MASSIF A TALUS. — Dans l'intérieur d'un massif quelconque, considérons une section verticale de hauteur $AB = y$ (*fig.* 8, *Pl. XLII*).

Soit φ_0 l'inclinaison de la pression qu'elle subit. On a nécessairement $\varphi_0 \leq \varphi$.

On ne change pas le mode d'équilibre du massif en enlevant la partie du massif placée à gauche de AB et soutenant la paroi verticale ainsi mise à nu par un mur de soutènement dont l'angle de frottement serait φ_0.

Donc, si l'on connaissait l'angle φ_0, on pourrait en déduire en grandeur, position et sens la pression, que nous appellerons R_ν, exercée sur AB. Pour chaque valeur de φ_0 comprise entre o et φ, on obtient donc ainsi une valeur correspondante pour R_ν.

Si donc, à partir d'un point O, on mène des rayons vecteurs OM faisant avec l'horizontale les angles φ_0 et que sur chaque rayon on porte une longueur OM proportionnelle à la valeur correspondante de R_ν, le lieu des points M formera, pour chaque section verticale de longueur donnée, une certaine courbe.

Mais si, comme il arrive le plus souvent, le massif est limité par un simple talus AT_0, si $AB = y$, on aura

$$R_\nu = \Pi y^2 \times r,$$

le coefficient r ne dépendant ni de la longueur y de AB, *ni de sa*

position à l'intérieur du massif, ni du poids spécifique Π de celui-ci, mais seulement de l'inclinaison de son talus AT_0 et de l'angle du frottement. La longueur r est d'ailleurs un nombre abstrait indépendant de toute unité.

Si donc on porte en rayon vecteur, non pas R_v, mais une longueur qui, à une échelle convenue, représente le nombre r, la courbe pq tracée une fois pour toutes pour un massif donné permettra de trouver la pression sur une section verticale quelconque si l'on en connaît la direction.

Pour tracer cette courbe, il suffit de faire $AB = y = 1$ et $\Pi = 1$ et d'appliquer pour chaque valeur admise pour φ_0 la construction graphique donnée précédemment, ou cette construction aidée du calcul (§ 582) si le point désigné par O tombait hors des limites de l'épure.

§ 589.

POUSSÉE SUR UN MUR POLYGONAL OU COURBE. — Considérons à présent (*fig.* B, *Pl. XLIII*) un mur polygonal $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$ à l'intérieur d'un massif limité par un talus A_0T_0.

Soient y_1, y_2, y_3, ... les profondeurs des sommets A_1, A_2, A_3, ...

Désignons par R_1, R_2, ... les réactions des côtés A_0A_1, A_1A_2, ..., c'est-à-dire des forces égales et contraires aux poussées que subissent ces côtés et qu'il s'agit de trouver.

Nous traçons une fois pour toutes (*fig. b*) pour le massif dont il s'agit la courbe Opq définie au paragraphe précédent.

Supposons que, par un moyen quelconque, on ait trouvé, par exemple, les poussées R_1, R_2, R_3, sur les trois côtés A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3; on demande de trouver en grandeur, position et sens la poussée R_4 sur le côté A_3A_4.

A cet effet, nous remarquons que la portion

$$A_0A_1A_2A_3A_4a_4A_0$$

du massif limité par la verticale A_4a_4 est en équilibre sous l'action :

1° De son poids Q qui est connu;

2° Des réactions R_1, R_2, R_3, R_4 dont les trois premières sont

supposées connues en grandeur, direction et sens et dont la dernière est connue en direction et sens, puisqu'elle fait avec la normale à A_3A_4 l'angle connu φ_0 ;

3° De la réaction sur la section A_4a_4.

Donc la somme des projections de toutes ces forces sur une droite quelconque est nulle.

Projetons-les sur la droite xx' normale à R_4 ou faisant l'angle φ_0 avec A_3A_4.

La projection de R_4 étant nulle, il en est de même de la somme des projections des autres forces. Ainsi, la projection sur xx' de la pression exercée sur A_4a_4 est égale et opposée à la somme des projections sur cette droite des forces données R_1, R_2, R_3, Q.

Soit X cette somme ainsi connue.

La pression sur A_4a_4 est égale à

$$\frac{1}{2}\Pi y_4^2 r_4,$$

r_4 étant le rayon de la courbe pq parallèle à cette pression. Donc la projection de r_4 sur une droite Ox'' parallèle à xx' est égale à

$$\frac{X}{\frac{1}{2}\Pi y_4^2}.$$

De là la règle suivante :

1° Projetez les longueurs représentatives des forces connues Q, R_1, R_2, R_3 sur xx' ; mesurez la somme de leurs projections à une échelle des forces. Divisez le nombre obtenu par la force

$$\frac{1}{2}\Pi y_4^2,$$

c'est-à-dire par la pression qu'un liquide de densité Π exercerait sur A_4a_4.

Le quotient indépendant de toute unité sera porté sur une droite Ox'' parallèle à xx' à l'échelle adoptée pour les rayons vecteurs de la courbe pq. Soit x'' le point ainsi obtenu. Menez de x'' une perpendiculaire à Ox''. Elle coupera la courbe pq en r_4. La direction Or_4 sera celle de la pression exercée sur A_4a_4. La

grandeur de cette pression sera

$$R'_4 = \frac{1}{2}\Pi y_4^2 r_4,$$

où $\frac{1}{2}\Pi y_4^2$ est le nombre de kilogrammes déjà calculé et r_4 un nombre abstrait mesuré à l'échelle des rayons vecteurs.

Elle est d'ailleurs appliquée au tiers de $A_4 a_4$ à partir de A_4.

2° Construisez la résultante des forces connues

$$(a) \qquad Q,\ R_1,\ R_2,\ R_3,\ R'_4.$$

Cette résultante sera en grandeur et position la force cherchée R_4 et sera de sens opposé.

La construction de cette résultante exige le tracé du polygone des cinq forces (a) et d'un de leurs polygones funiculaires. Si l'on ne veut pas la position de R_4, mais seulement sa grandeur, il suffit de tracer le polygone des forces. Si la longueur A_3A_4 est petite par rapport à y_3 et y_4, la force R_4 sera sensiblement au milieu de A_3A_4.

Ainsi, connaissant les poussées sur un certain nombre de côtés du mur, on la trouve sur le côté suivant.

Or, on peut la trouver sur le côté A_0A_1 par la méthode ordinaire; par suite, on la trouvera sur A_1A_2, puis sur A_2A_3, et ainsi de suite.

Si, au lieu d'un mur polygonal, on a un mur courbe, on remplacera approximativement la courbe par un polygone inscrit d'un nombre suffisant de côtés.

§ 590.

RÉPARTITION DES PRESSIONS D'UN REMBLAI SUR L'EXTRADOS D'UNE VOUTE. — Nous avons dit précédemment qu'on admet en général que chaque voussoir d'une voûte supporte une charge verticale égale au poids du prisme de terre qui lui correspond. Cette hypothèse est évidemment absurde aux points de l'extrados, s'il y en a, où la tangente fait avec l'horizontale un angle plus grand que l'angle du frottement des terres qui forment le remblai, et elle n'est certainement pas exacte aux autres points.

La méthode qui précède permet de trouver cette répartition.

Soit (*fig.* 1, *Pl. XLIII*) A_0B la moitié de l'extrados d'une voûte symétrique par rapport à la verticale A_0a_0 de son sommet, supportant un remblai limité par un talus quelconque a_0T_0.

Divisons la courbe A_0B en un certain nombre de parties égales et remplaçons-la par le polygone $A_0A_1A_2A_3A_4B$.

Soient y_0, y_1, y_2, ... les ordonnées des sommets A_0, A_1, A_2, ... comptées depuis le dessus du remblai.

A cause de la symétrie, la pression que les terres de gauche exercent sur la section A_0a_0 de la clef est horizontale.

Donc cette section est dans le même cas que si elle était soutenue par un mur parfaitement lisse. On trouvera donc cette pression par la méthode ordinaire, en faisant $\varphi_0 = 0$. Le prisme de rupture fait (§ 584) avec A_0a_0 un angle égal à $\frac{\varphi}{2}$.

A présent, construisons pour l'angle φ relatif au remblai et pour l'angle du talus aT_0, qui sera généralement nul, la courbe *pq* du § 589.

Connaissant la pression sur A_0a_0 qui est au tiers de cette ligne à partir de A_0, on en déduit par la méthode du § 589 d'abord en grandeur, direction et sens la pression sur A_1a_1, puis la poussée sur le côté A_0A_1 de la voûte; de celle-ci on déduira celle exercée sur le côté A_1A_2, et ainsi de suite.

Ce sont les forces (non verticales) ainsi obtenues qu'il faudrait introduire avec les poids des voussoirs dans le tracé du polygone des pressions de la voûte.

La méthode du Chap. I s'appliquerait d'ailleurs aussi bien que quand les forces sont verticales, sauf les simplifications résultant des propriétés particulières aux courbes funiculaires des forces parallèles qu'on ne pourrait naturellement plus mettre à profit.

§ 591.

BUTÉE DES TERRES. — Soit (*fig.* 2, *Pl. XLIII*) ABCD un mur soutenant un massif quelconque BAE_0T_0. Supposons qu'en avant du mur soit un autre massif limité par un profil tel que $A'_0E'_0F'_0T'_0$.

Soit *bb'* une assise horizontale quelconque du mur.

Désignons par bX_1 le plan de rupture précédemment déter-

miné, de sorte qu'à l'état d'équilibre-limite la poussée produite sur la partie Ab de la face postérieure du mur est due au prisme bAE_0X_1 qui tend à descendre le long du plan bX_1 et à chasser la portion $bACb'$ du mur devant lui en la faisant glisser de b vers b'.

Cette portion du mur, à son tour, déterminera dans le massif de gauche un plan de rupture tel que $b'X'_1$ et la *contre-pression* produite par le prisme $b'X'_1F'_0E'_0A'_0$ sur la partie $b'A'_0$ de la face antérieure du mur est ce que Poncelet appelle la *butée des terres*.

La butée exercée sur le parement entier A'_0D s'oppose donc à ce que le mur glisse sur sa base DB. Elle accroît sa stabilité dans une certaine mesure. C'est pourquoi il y a intérêt à pouvoir la déterminer.

Le problème est le même que celui de la poussée, avec cette différence que l'état d'équilibre-limite qu'on considère dans la poussée est celui pour lequel le prisme qui produit la poussée tend à *descendre* sur le plan de rupture bX_1 vers b, tandis que le prisme qui produit la butée tend à glisser de b' vers X'_1. Dans le premier cas, le frottement agit toujours en opposition avec la pesanteur, tandis qu'ici l'effet du frottement s'ajoute généralement à celui du poids du prisme, de sorte que, pour un même profil des terres, la butée est plus grande que la poussée.

Mais les principes qui servent à déterminer ces deux forces sont les mêmes. On montrerait, comme au § 380, que le plan de rupture $b'X'_1$ est celui qui détermine sur le mur la butée *minima* (tandis que le plan de rupture bX_1 est celui qui produit la poussée *maxima*).

En raisonnant comme au § 381, on est amené à la construction géométrique suivante :

Pour avoir la butée sur une portion $b'A'_0$ du mur, prenez sur le talus $T'_0F'_0$, sur lequel on suppose que se trouvera le point X'_1, un point A'', tel que le triangle $b'A''F''_0$ soit équivalent à l'aire $b'F'_0E'_0A'_0$.

Si le fossé $F'_0E'_0A'_0$ n'existe pas, le point A'' est le point d'intersection du talus unique $T'_0F'_0$ avec $b'C$.

Par A'' menez $A''T'$ parallèle au talus naturel des terres; par b' menez $b'O'$ faisant avec $b'C$ l'angle $\varphi + \varphi_0$.

Soit T' le point de rencontre de ces deux lignes et O' celui de la dernière avec le talus $F'_0T'_0$.

Sur $T'b'$ comme diamètre décrivez une demi-circonférence. Par le point O' menez la tangente $O't'$ à cette demi-circonférence. Rabattez cette tangente $O't'$ autour de O' non plus sur $O'b'$, mais sur son prolongement en x'_1.

La butée aura pour expression

$$B = \frac{1}{2}\Pi\overline{b'x'_1}^2 \sin O'T'A''$$

ou

$$B = \frac{1}{2}\Pi\overline{b'x'_1}^2 \cos(\varphi_0 \mp \varepsilon'),$$

ε' étant l'angle de CD avec la verticale, le signe — convenant au cas où CD est incliné, comme il est indiqué, vers le mur; le signe $+$, dans le cas contraire.

Si par le point x'_1 on mène une parallèle au talus naturel qui rencontre $F'_0T'_0$ en X'_1, la ligne $b'X'_1$ est la ligne de rupture.

On voit bien que $b'x'_1$ est plus grand que si l'on avait rabattu sur $O'b$, c'est-à-dire qu'à profil égal la butée est plus grande que la poussée.

Remarque. — Si, par le point b', on mène $b'H$ parallèle au talus naturel jusqu'à sa rencontre en H avec le talus $T'_0F'_0$ prolongé, qu'on décrive une demi-circonférence sur $A''H$ comme diamètre, qu'on mène la tangente $O't'_1$ à cette demi-circonférence et qu'on la rabatte autour de O' jusqu'au talus, on retrouve le point X'_1.

Car, de ce que

$$\overline{O'x'_1}^2 = O'T' \times O'b',$$

on conclut facilement, par les triangles semblables de la figure,

$$\overline{O'X'_1}^2 = O'A'' \times O'H = \overline{O't'_1}^2.$$

§ 592.

TABLES ET RÈGLE EMPIRIQUE DE M. FLAMANT, POUR LE CAS D'UN TALUS UNIQUE. — M. Boussinesq, dans divers articles insérés aux *Annales des Ponts et Chaussées* (2e semestre 1883, p. 494, 510; 1er semestre 1884, p. 443), a donné de la poussée des terres une

analyse plus approfondie que celle qui résulte du principe de l'équilibre-limite. Il cherche la vraie poussée et il trouve que, dans certains cas, même dans l'hypothèse d'un mur plus rugueux que les terres, elle ne fait pas toujours avec la normale au mur un angle égal à l'angle du frottement φ des terres sur elles-mêmes; elle peut faire un angle moindre.

Il a plus particulièrement étudié le cas le plus simple et le plus usuel d'un mur plan soutenant un massif limité par un talus.

Sa solution analytique est d'un calcul assez laborieux, même dans ce cas. Mais, comme elle paraît bien d'accord avec les faits d'expérience constatés en Angleterre par Darwin et en France par M. Gobin, M. l'Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées Flamant a eu l'heureuse idée de les réduire en Tables numériques et il a déduit de ses calculs une règle empirique très simple.

Son travail est inséré aux *Annales des Ponts et Chaussées*, avril 1885, p. 515.

CHAPITRE IV.

PIÈCES SIMPLEMENT COMPRIMÉES OU TIRÉES D'ÉGALE RÉSISTANCE. MURS SOUTENANT DE L'EAU OU DES TERRES.

A. PIÈCES SIMPLEMENT COMPRIMÉES OU TIRÉES D'ÉGALE RÉSISTANCE.

§ 593.

Considérons une pièce sensiblement prismatique ABCD (*fig.* 3, *Pl. XLIII*) à fibre moyenne verticale, reposant sur le sol par sa base CD, soumise à l'action de son poids et d'une pression donnée P_0 uniformément répartie sur sa surface supérieure AB ou, au contraire (*fig.* 4), fixée par sa base supérieure CD et portant une charge P_0 uniformément répartie sur sa surface inférieure AB.

Elle sera comprimée dans le premier cas, tendue dans le second et, dans les deux cas, exempte de flexion.

Désignons par S l'aire de la section *ab* faite à une distance z de AB.

La pression ou tension que supporte la section *ab* et qui sera uniformément répartie dans cette section est

$$P_0 + \Pi \int_0^z S\,dz,$$

en désignant par Π le poids spécifique de la matière dont la pièce est formée.

La pression ou tension par unité de surface sera donc

$$\frac{P_0 + \Pi \int_0^z S\,dz}{S}.$$

Pour que la pièce résiste, il faut que cette force soit moindre

que celle qu'on ne veut pas dépasser eu égard à la matière employée et que nous appellerons R.

Ainsi, pour toute valeur de z, on doit avoir

$$(1)\qquad \frac{P_0 + \Pi \int_0^z S\,dz}{S} \leq R.$$

§ 594.

PIÈCE DE SECTION CONSTANTE. LIMITE DE HAUTEUR. — Si la pièce est rigoureusement prismatique, c'est-à-dire si la section S est constante, on devra avoir

$$(2)\qquad \frac{P_0 + \Pi S z}{S} \leq R.$$

Il y a deux cas à considérer suivant que P_0 est ou non différent de zéro.

Si $P_0 = 0$, S disparaît de l'inégalité qui devient

$$\Pi z \leq R$$

ou

$$(3)\qquad z \leq \frac{R}{\Pi}.$$

Ainsi, une tour en maçonnerie rigoureusement cylindrique, dont la hauteur est moindre que le quotient $\frac{R}{\Pi}$ de la résistance à l'écrasement de la pierre par son poids spécifique, tient, quelque section qu'on lui donne, si elle ne porte aucune charge à sa partie supérieure. Au delà de la hauteur $\frac{R}{\Pi}$, elle s'écrase sous son propre poids, aussi, quelle que soit sa section.

Supposons une pierre supportant 2000^{kg} par centimètre carré, soit 2×10^7 par mètre carré.

Supposons que sa densité soit de 2,4, c'est-à-dire qu'elle pèse 2400^{kg} par mètre cube. La hauteur que ne pourra pas dépasser une tour cylindrique formée d'une telle matière sera

$$\frac{2 \times 10^7}{2400} = \frac{10^5}{12} = 8333^m,33.$$

Mais la pierre qui supporte une telle pression est l'exception. La brique dure ne supporte que 200 à 300kg et même, à supposer une pierre supportant 2000kg comme charge d'écrasement, comme les mortiers s'écrasent sous une charge beaucoup moindre, on ne pourrait pas compter sur une résistance proportionnée à celle de la pierre.

En supposant une résistance à l'écrasement de 150kg par centimètre carré, soit 15×10^5 par mètre carré et une pierre pesant 2000kg par mètre cube, la limite de hauteur serait

$$\frac{15 \times 10^5}{2 \times 10^3} = \frac{1500}{2} = 750^m.$$

Si $P_0 \gtrless 0$, l'inégalité (2) donne

$$S \geq \frac{P_0}{R - \Pi z}.$$

Elle sera remplie pour toute valeur de z, si elle l'est pour la plus grande d'entre elles, soit pour $z = h$, h étant la longueur totale du prisme.

Ainsi, on devra avoir

$$(4) \qquad S \geq \frac{P_0}{R - \Pi h}.$$

Pour $h = \frac{R}{\Pi}$, on aurait $S = \infty$, ce qui indique, comme nous l'avons déjà trouvé, que cette hauteur ne peut être atteinte pour un prisme de section constante. Et, en effet, une tour atteignant cette hauteur s'écrasant déjà sans la surcharge P_0, on devait trouver qu'elle s'écraserait à plus forte raison avec la surcharge.

De même un câble de mine se rompra sous son propre poids et, à plus forte raison, s'il porte une charge à son extrémité inférieure, si sa longueur h dépasse le rapport $\frac{R}{\Pi}$.

En supposant un fer qui se rompe sous une charge de 30kg par millimètre carré, soit de 3×10^7 par mètre carré et ayant un poids spécifique de 7800kg, la longueur maxima d'un câble fait avec cette matière serait

$$\frac{3 \times 10^7}{78 \times 10^2} = \frac{3 \times 10^5}{78} = \frac{10^5}{26} = 3846^m.$$

Mais, si l'on ne veut pas dépasser une charge de 6^{kg} par millimètre carré, la longueur maxima d'un câble cylindrique serait

$$2 \times 384,6 = 769^{m},2.$$

§ 595.

PIÈCE DE SECTION VARIABLE. — Mais, si la section est variable, il n'y a plus de limite à la longueur d'une pièce comme celles dont il s'agit.

Si l'on se donne la loi de variation de la section S avec la hauteur z, soit

$$(5) \qquad S = f(z),$$

en portant cette valeur dans l'inégalité (1), si l'on effectue l'intégration du numérateur, on aura

$$(6) \qquad \frac{P_0 + \Pi \int_0^z f(z)\,dz}{f(z)} \leq R,$$

qui devra être vérifiée pour toutes les valeurs de z.

§ 596.

PIÈCE D'ÉGALE RÉSISTANCE. — Pour que la pièce soit d'égale résistance, il faut que l'on ait, pour toutes les valeurs de z,

$$(7) \qquad \frac{P_0 + \Pi \int_0^z S\,dz}{S} = R.$$

Soit S_0 la section CD répondant à $z = 0$. Pour $z = 0$, l'équation devient

$$\frac{P_0}{S_0} = R,$$

d'où

$$(8) \qquad S_0 = \frac{P_0}{R}.$$

Si l'on différentie l'équation (7) après l'avoir multipliée par S,

il viendra

$$\Pi S\,dz = R\,dS,$$

d'où

(9) $$\frac{dS}{S} = \frac{\Pi}{R}dz,$$

(9') $$\log S = \frac{\Pi}{R}z + \log C,$$

C étant une constante.

Or, pour $z = 0$, on a $S = S_0$ et, à cause de (8),

$$S_0 = \frac{P_0}{R}.$$

Donc

$$C = S_0 = \frac{P_0}{R}$$

et, par suite

(10) $$S = S_0 e^{\frac{\Pi}{R}z} = \frac{P_0}{R}e^{\frac{\Pi}{R}z}.$$

Telle est la loi suivant laquelle doit varier la section pour que la pièce soit d'égale résistance et alors, *quelle qu'en soit la hauteur, toutes les sections supporteront la même pression ou la même tension* R *par unité de surface.*

Dans le cas où $P_0 = 0$, la formule donne $S = 0$.

Dans la pratique, on est toujours amené à donner à la section extrême une valeur déterminée S_0. S'il s'agit d'une tour ou d'un mur, ses dimensions en couronne sont généralement commandées par des considérations étrangères à la résistance.

Supposons donc S_0 donnée.

Alors la section extrême S_0 supporte une pression nulle et, si l'on adopte partout la valeur de S donnée par la formule (10), toutes les autres sections supportent des pressions moindres que R et s'en rapprochant de plus en plus. On a en effet pour la pression ou tension dans une section S, puisque $P_0 = 0$,

(11) $$\frac{\Pi\int_0^z S\,dz}{S} = \frac{\Pi S_0\int_0^z e^{\frac{\Pi}{R}z}\,dz}{S_0 e^{\frac{\Pi}{R}z}} = R\left(1 - e^{-\frac{\Pi}{R}z}\right),$$

de sorte que la pression ou tension se rapproche rapidement de R à mesure que z croît.

Remarque. — Au point de vue purement économique, il serait mieux de procéder ainsi : la section supérieure S_0 de la tour étant commandée par les besoins de la construction, et étant supérieure à ce qu'exige la résistance, puisqu'au point de vue de la résistance on pourrait partir d'une section nulle, il est naturel de conserver cette section S_0 sans augmentation, c'est-à-dire de faire la partie supérieure de la tour cylindrique sur une hauteur z_0 fournie (§ 594) par l'équation

$$z_0 = \frac{R}{\Pi},$$

de sorte qu'au pied de cette partie cylindrique la pression par unité de surface serait celle R qu'on ne veut pas dépasser, et la pression totale serait

$$P_0 = RS_0.$$

A partir de là, on évaserait la tour, en adoptant les sections fournies par la formule (10). De cette façon, la tour supporterait la pression voulue R depuis son pied jusqu'au pied de la partie cylindrique et une pression moindre, dans cette dernière partie.

§ 597.

CABLES, MURS, CHEMINÉES, TOURS D'ÉGALE RÉSISTANCE SOUS L'ACTION DE CHARGES VERTICALES. — Dans les câbles de mine, la charge P_0 est donnée : c'est le poids du minerai qu'on veut monter. Si le câble a une section rectangulaire d'épaisseur ε et de largeur λ, on aura

$$S = \varepsilon\lambda,$$

d'où

$$\lambda = \frac{P_0}{R\varepsilon} e^{\frac{\Pi}{R} z}, \tag{12}$$

de sorte que la largeur λ varie comme l'ordonnée d'une courbe exponentielle.

S'il s'agit d'un mur dont l'épaisseur en couronne ε_0 est donnée, soit parce que le mur porte une charge P_0, soit par d'autres considérations, et si ε est l'épaisseur à une distance z du sommet, on aura

$$S = \varepsilon,$$

en supposant que l'on considère une longueur de mur égale à l'unité. Par suite

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{\frac{\Pi}{R} z}, \tag{13}$$

et l'épaisseur du mur varie aussi comme l'ordonnée d'une exponentielle. On prendra pour les deux parements des courbes symétriques, si le mur n'a pas d'autre charge à supporter que son poids.

Soient

r_0 le rayon intérieur d'une cheminée dont la cavité intérieure est cylindrique;

ε_0 son épaisseur au sommet;

ε son épaisseur à une distance z du sommet.

On aura

$$S_0 = \varpi[(r_0 + \varepsilon_0)^2 - r_0^2] = \varpi\varepsilon_0(2r_0 + \varepsilon_0)$$

et de même

$$S = \varpi\varepsilon(2r_0 + \varepsilon):$$

d'où

$$\varepsilon(2r_0 + \varepsilon) = \varepsilon_0(2r_0 + \varepsilon_0)e^{\frac{\Pi}{R} z}$$

et

$$\varepsilon = -r_0 + \sqrt{r_0^2 + \varepsilon_0(2r_0 + \varepsilon_0)e^{\frac{\Pi}{R} z}}, \tag{14}$$

qui indique l'épaisseur à donner en chaque point de la cheminée et, par suite, la courbe méridienne de la surface extérieure.

Pour une tour la formule est la même.

S'il s'agissait d'un obélisque circulaire plein, on aurait

$$r_0 = 0$$

et

$$\varepsilon = \varepsilon_0 e^{\frac{\Pi}{2R} z}, \tag{15}$$

pour le rayon ε à adopter en chaque point.

La méridienne serait encore la courbe exponentielle.

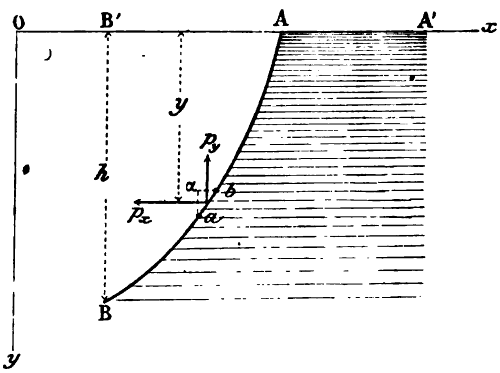
On peut aussi, dans tous ces cas, utiliser la remarque de la fin du paragraphe précédent.

B. — MURS SOUTENANT UNE PRESSION D'EAU.

§ 598.

PRESSION DE L'EAU SUR UNE PAROI CYLINDRIQUE. — Considérons une paroi cylindrique dont les génératrices sont horizontales et dont la section droite est AB (*fig.* 15).

Fig. 15.



Elle supporte la pression d'un liquide que nous supposons être de l'eau, dont le niveau est AA'.

Si l'on considère un élément $ab = ds$, la pression qu'il supporte est

$$p = \Pi y \, ds,$$

Π étant le poids spécifique de l'eau et y la distance au niveau AA' du milieu de l'élément ds.

Soient $a\alpha = dy$ et $\alpha b = dx$ les projections verticale et horizontale de ds.

La pression p, normale à ab, peut être décomposée (§ 31) en deux autres, l'une horizontale

$$p_y = \Pi y \, ds \times \frac{dx}{ds} = \Pi y \, dx, \tag{16}$$

l'autre

$$p_x = \Pi y \, dy. \tag{16'}$$

La résultante P_x de ces dernières est

$$P_x = \Pi \int_0^h y\,dy,$$

en désignant par h l'ordonnée BB′ de l'extrémité B de la paroi, soit

$$P_x = \frac{\Pi h^2}{2}. \tag{17}$$

L'ordonnée η de son point d'application est fournie par l'équation

$$P_x \eta = \Pi \int y^2\,dy = \Pi \frac{h^3}{3},$$

d'où

$$\eta = \frac{2}{3} h. \tag{18}$$

Ainsi, *la composante horizontale de la résultante des pressions exercées sur une paroi courbe* AB *est indépendante de sa forme*. Elle est la même que celle des pressions qui s'exerceraient sur une paroi verticale BB′, projection de la paroi considérée.

Il n'en est pas de même de la composante verticale P_y de la résultante des pressions exercées sur AB.

Celle-ci a pour valeur

$$P_y = \Pi \int_0^h y\,dx. \tag{19}$$

C'est donc l'aire du triangle mixtiligne ABB′ *qu'on ne peut évaluer que si la courbe* AB *est donnée.*

L'abscisse ξ de son point d'application par rapport à une verticale Oy quelconque est donnée par la formule

$$\xi P_y = \Pi \int_0^h yx\,dx$$

ou

$$\xi \int_0^h y\,dx = \int_0^h yx\,dx \tag{20}$$

C'est l'abscisse du centre de gravité de cette même aire ABB′.

On voit donc que, si AB est une ligne droite, la pression P_y est

$$P_y = \Pi \frac{h}{2} \cdot AB', \qquad (21)$$

et son point d'application est au tiers de B'A à partir du point B'.

§ 599.

CONDITIONS DE RÉSISTANCE D'UN MUR DE SOUTÈNEMENT. — Si un mur est soumis à l'action de son propre poids et à des forces horizontales ou inclinées, il faut, comme pour les pieds-droits d'une voûte, que la résultante de la pression exercée sur le pied du mur et généralement sur toute assise horizontale,

1° Coupe cette assise dans son tiers moyen;

2° Fasse avec la verticale un angle moindre que l'angle du frottement de la maçonnerie sur elle-même (on admet généralement que cet angle peut aller jusqu'à 30°);

3° Que la pression maxima par unité de surface ne dépasse pas une valeur donnée dépendant de la nature de la pierre employée.

§ 600.

MURS DE SECTION RECTANGULAIRE OU TRIANGULAIRE. — Si l'on considère, d'après cela (*fig.* 6), un mur ABCD à parois verticales d'épaisseur ε, de hauteur h, la pression de l'eau est une force horizontale appliquée au tiers de DB à partir de D et a pour expression

$$P = \Pi \frac{h^2}{2}.$$

Et si l'on désigne par $\delta\Pi$ le poids spécifique de la maçonnerie, le poids du mur est

$$Q = \delta\Pi h \varepsilon.$$

La résultante de ces deux forces est nécessairement à gauche du milieu de la base CD.

Pour qu'elle soit contenue dans le tiers moyen de cette base, il faut que la somme des moments par rapport au point i pris au

tiers de CD à partir de C soit nulle ou positive en comptant positivement le moment du poids Q. Il faut donc que

$$Q\frac{\varepsilon}{6} - P\frac{h}{3} \geq 0$$

ou

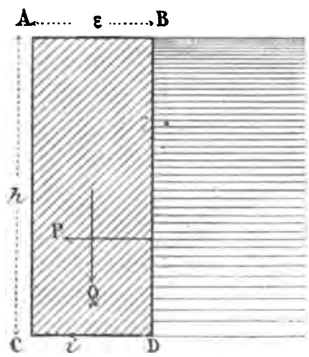
$$\delta\varepsilon^2 - h^2 \geq 0$$

ou

$$\varepsilon^2 \geq \frac{h^2}{\delta},$$

(22) $$\frac{\varepsilon}{h} \geq \frac{1}{\sqrt{\delta}}.$$

Fig. 16.



Ainsi, le rapport de l'épaisseur à la hauteur du mur doit être au moins égal à l'inverse de la racine carrée de la densité de la maçonnerie, rapportée à celle de l'eau, ou exprimé en tonnes par mètre cube. Supposons cette densité de 2,25 ; on devra avoir

$$\frac{\varepsilon}{h} \geq \frac{1}{\sqrt{2,25}}$$

ou

$$\frac{\varepsilon}{h} \geq \frac{1}{1,5}$$

ou

(23) $$\varepsilon \geq \frac{2}{3}h,$$

formule qui donne une première idée des dimensions à donner à un mur soutenant une colonne d'eau.

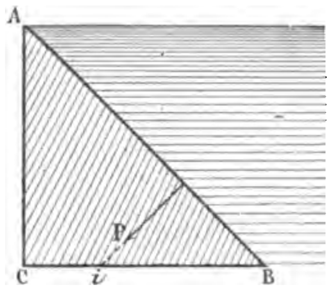
Supposons un mur dont la section soit un triangle rectangle isoscèle ACB dont la paroi AC est verticale (*fig.* 17).

Le poids de la maçonnerie passe au tiers de la base à partir du point C. Il faut donc que la pression P y passe aussi.

C'est ce qui a lieu.

Ainsi, un tel mur satisfait à la première condition de stabilité qui est la condition essentielle. On vérifie aisément si elle satisfait aux deux autres.

Fig. 17.



L'épaisseur moyenne du mur n'est ici que $\frac{h}{2}$. On voit donc que cette forme est plus avantageuse que la précédente, et si l'on ne peut l'employer strictement, parce qu'il est nécessaire, dans la pratique, de donner une certaine épaisseur au sommet du mur, il convient de s'en rapprocher.

§ 601.

MURS AVEC FRUITS. — Considérons à présent (*fig.* 18, p. 95) un mur ABCD dont la section ait la forme d'un trapèze.

La pression P de l'eau agit au tiers I de la paroi DB.

Sa valeur est

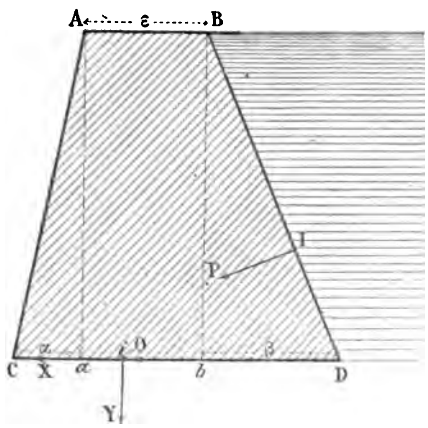
$$P = \tfrac{1}{2}\Pi h \times BD, \tag{24}$$

h étant la hauteur du mur.

Il est aisé de composer cette force avec le poids du mur et de vérifier graphiquement si la résultante de ces deux forces passe dans le tiers moyen de la base.

Si elle n'y passe pas, il faut augmenter les dimensions du mur. Si elle y passe, on peut les diminuer par tâtonnement, jusqu'à ce qu'elle passe exactement au tiers i de CD à partir de C. C'est alors qu'on aura, pour la forme du mur considéré, la section de maçonnerie la plus faible possible.

Fig. 18.



Au lieu de procéder graphiquement et par tâtonnement, on peut, par le calcul, résoudre directement le problème.

Soit $AB = \varepsilon$ l'épaisseur en couronne. Menons les verticales Aa et Bb et soient $Ca = \alpha$, $Db = \beta$. La hauteur du mur est h.

Soit O le milieu de ab. Écrivons que le moment de la résultante du poids du mur et de la pression de l'eau par rapport au point O est égal à la somme des moments des composantes.

Soient X et Y les composantes horizontale et verticale de la résultante qui passe au point i et, quel que soit ce point, désignons par ξ la distance iO.

Nous comptons les moments positifs de gauche à droite. Par suite, le moment de la résultante est

$$-Y\xi.$$

D'ailleurs Y se compose du poids de la maçonnerie et de la composante verticale de la pression P, soit

$$Y = \Pi\delta h\left(\varepsilon + \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \frac{\Pi h\beta}{2}.$$

Ainsi, le moment de la résultante est

$$-\Pi h\xi\left[\delta\left(\varepsilon+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\frac{\beta}{2}\right].$$

Le moment du poids du triangle ACa est

$$-\Pi\delta h\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Le moment du poids du rectangle ABab est nul.
Le moment du poids du triangle BbD est

$$+\Pi\delta h\frac{\beta}{2}\left(\frac{\beta}{3}+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Le moment de la composante horizontale de la pression,

$$-\frac{\Pi h^2}{2}\times\frac{h}{3}=-\Pi\frac{h^3}{6}.$$

Celui de la composante verticale,

$$\frac{\Pi h\beta}{2}\left(\frac{2\beta}{3}+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Donc le théorème des moments donne, en supprimant le facteur h,

$$\begin{aligned}&-\xi\left[\delta\left(\varepsilon+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\frac{\beta}{2}\right]\\&=-\frac{\delta\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\frac{\delta\beta}{2}\left(\frac{\beta}{3}+\frac{\varepsilon}{2}\right)-\frac{h^2}{6}+\frac{\beta}{2}\left(\frac{2\beta}{3}+\frac{\varepsilon}{2}\right).\end{aligned}$$

On voit que

$$\xi=iO=OC-O\iota$$

ou

$$\xi=\frac{\varepsilon}{2}+\alpha-\frac{\alpha+\varepsilon+\beta}{2}=\frac{\varepsilon}{6}+\frac{2\alpha-\beta}{3}.$$

Par suite, en multipliant par 6,

$$(25)\quad\left\{\begin{aligned}&\left[\delta\left(\varepsilon+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\frac{\beta}{2}\right](\varepsilon+4\alpha-2\beta)\\&\quad+\delta\beta\left(\beta+\frac{3\varepsilon}{2}\right)-\delta\alpha\left(\alpha+\frac{3\varepsilon}{2}\right)+\beta\left(2\beta+\frac{3\varepsilon}{2}\right)-h^2=0.\end{aligned}\right.$$

équation du second degré en ε, α, β, h.

On peut donc se donner l'épaisseur en couronne ε, le fruit AC, c'est-à-dire α, et trouver β, par la condition que la pression sur la base passe en i.

En ordonnant l'équation qui est du second degré en β, on aura

$$\beta^2 + \left(\frac{3}{4}\varepsilon + \frac{\delta\alpha}{2}\right)\beta + \delta\varepsilon^2 + 3\delta\varepsilon\alpha + \delta\alpha^2 - h^2 = 0.$$

Comme on se donne α et ε et qu'on veut déterminer la direction de la paroi d'amont de façon que la pression totale exercée sur la base CD passe au tiers i de sa base, on commencera par supposer cette paroi verticale et l'on vérifiera si, dans ces conditions, la pression passe à gauche de i. Si elle passait à sa droite, elle y passerait *a fortiori* si l'on donnait un fruit à BD. On prendrait alors BD vertical.

Supposons qu'on ne puisse pas adopter cette solution, c'est-à-dire que, si BD était vertical, la résultante passerait à gauche en i.

Cela signifie que, dans ces conditions, le moment de la pression par rapport à i serait négatif au lieu d'être nul, c'est-à-dire que pour $\beta = 0$ le premier membre de l'équation ci-dessus est négatif.

Ainsi on commencera par examiner le signe de la quantité

$$\delta\varepsilon^2 + 3\delta\varepsilon\alpha + \delta\alpha^2 - h^2.$$

Si cette grandeur est positive, on adoptera la paroi d'amont verticale. Dans le cas contraire, l'équation du second degré ci-dessus ayant son dernier terme négatif admet deux racines réelles et de signes contraires. On adoptera la racine positive, ce qui déterminera la direction à donner à la paroi.

§ 102.

CONDITION DE RÉSISTANCE-LIMITE SUR LA BASE. — On peut aussi disposer des fruits des deux parois en adjoignant à la condition précédente celle d'avoir sur la base une pression maxima donnée R par unité de surface.

La pression totale sur la base est Y. Comme cette force est appliquée au tiers de la base à partir du point C, la pression en D

est nulle et celle en C est double de ce qu'elle serait si la force Y était uniformément répartie sur la base, soit

$$\frac{2Y}{\varepsilon+\alpha+\beta}.$$

Donc on doit avoir

$$\frac{2Y}{\varepsilon+\alpha+\beta}=R.$$

Soit

$$(26)\qquad \delta(2\varepsilon+\alpha+\beta)+\beta=\frac{R}{\Pi h},$$

équation du premier degré en α et β. Si l'on en tire la valeur de α et qu'on la porte dans l'équation (25), on aura une nouvelle équation du second degré en β qu'on pourra résoudre. Ayant β, on en déduira α par la résolution de l'équation du premier degré ci-dessus.

§ 603.

MURS A PAROIS POLYGONALES OU COURBES. — Supposons un mur (*fig.* 5, *Pl. XLIII*) divisé en assises et limité par des parois polygonales ou une paroi plane et une paroi polygonale.

On peut se proposer, en se donnant l'une des parois qu'on prendra alors plane (ce sera, en général, celle d'aval), de disposer de l'autre de façon qu'en chaque assise la pression passe au tiers extérieur, ou disposer des deux parois en adjoignant à la condition précédente celle d'avoir une pression normale donnée R sur chaque assise.

Ces problèmes peuvent se résoudre aussi bien que ceux du paragraphe précédent.

Supposons d'abord que l'une des parois étant données, plane ou non, on veuille disposer de l'autre de façon que la pression sur chaque assise passe en son tiers d'aval.

On se donne l'épaisseur en couronne $A_0B_0=\varepsilon_0$ suivant la nature du mur et en dehors des conditions de résistance. La paroi d'aval étant, je suppose, donnée, il existera une certaine hauteur $A_0A'_0$ telle que, la paroi d'amont $B_0B'_0$ y étant prise verticale, la pression passe partout dans le tiers moyen de la portion consi-

dérée du mur. Pour obtenir cette hauteur, il suffit, dans l'équation (25), de faire $\beta = 0$ et de la résoudre par rapport à h.

Ayant ainsi l'assise $A'_0 B'_0$ telle que la portion cherchée de paroi placée au-dessus d'elle doit être prise verticale, on divisera le reste de la hauteur du mur en parties égales ou inégales; il s'agit, dans chaque portion du mur ainsi obtenue, de trouver la direction de la paroi d'amont.

Supposons le problème résolu pour toute la partie du mur placée au-dessus d'une assise $A_n B_n$, de sorte que l'on connaît la portion de paroi $B_0 B_n$; il s'agit de trouver le côté $B_n B_{n+1}$.

Soit

$$A_n B_n = \varepsilon_n.$$

Menons les verticales $A_n a_n$, $B_n b_n$ et soient

$$A_{n+1} a_n = \alpha_{n+1}, \qquad B_{n+1} b_n = \beta_{n+1}.$$

C'est cette dernière grandeur qui est l'inconnue du problème.

Désignons par i_n le tiers extérieur de $A_n B_n$; par i_{n+1} le point analogue pour $A_{n+1} B_{n+1}$ et par O le milieu de $a_n b_n$.

Par hypothèse, la pression sur $A_n B_n$ passe en i_n. Soient X_n, Y_n ses composantes horizontale et verticale. On a (§ 598)

$$X_n = \Pi \frac{y_n^2}{2},$$

en désignant par y_n la distance verticale entre $A_n B_n$ et le niveau du réservoir.

On connaît donc tous les X_n.

Quant aux composantes Y_n, il est aisé de les calculer de proche en proche.

Soit Y_{n+1} celle relative à l'assise $A_{n+1} B_{n+1}$.

La force Y_{n+1} se compose de celle Y_n plus le poids du massif de maçonnerie $A_n A_{n+1} B_n B_{n+1}$, plus la composante verticale de la pression exercée sur $B_n B_{n+1}$.

Le poids de $A_n B_n A_{n+1} B_{n+1}$ se calcule aisément. Il a pour expression

$$\delta \Pi h_n \left(\varepsilon_n + \frac{\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}}{2} \right),$$

en désignant par h_n la distance verticale des assises $A_n B_n$ et $A_{n+1} B_{n+1}$.

Élevons en B_n et B_{n+1} des perpendiculaires à la droite $B_n B_{n+1}$ respectivement égales à y_n et y_{n+1}, de manière à former le trapèze $B_n B_{n+1} b'_n b'_{n+1}$ qu'on peut décomposer dans le rectangle $B_n b'_n B_{n+1} c_n$ et le triangle $b'_n c_n b'_{n+1}$.

Les ordonnées de ce trapèze représentent les pressions. Le rectangle représente une pression uniforme appliquée, par suite, au milieu de $B_n B_{n+1}$ et dont la composante verticale appliquée au milieu de $B_{n+1} . b_n$ est

$$\Pi y_n \beta_{n+1}.$$

Le triangle représente une pression appliquée au tiers de $B_n B_{n+1}$ et dont la composante verticale, appliquée au tiers de $B_{n+1} b_n$ à partir de B_{n+1}, est égale à

$$\Pi(y_{n+1} - y_n)\frac{\beta_{n+1}}{2}.$$

Donc

$$(27)\quad \begin{cases} Y_{n+1} = Y_n + \Pi h_n \Big[\delta\left(\varepsilon_n + \dfrac{\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}}{2}\right) \\ \qquad\qquad + y_n \beta_{n+1} + (y_{n+1} - y_n)\dfrac{\beta_{n+1}}{2} \Big]. \end{cases}$$

On connaît Y_0 qui est le poids du rectangle $A_0 A'_0 B_0 B'_0$.

Donc, en faisant successivement dans cette équation

$$n = 1, 2, 3, \ldots, (n-1),$$

comme par hypothèse on connaît par des opérations antérieures $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_n$, on connaîtra aussi $Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n$.

Quant à Y_{n+1}, l'équation ci-dessus en donne l'expression *en fonction de l'inconnue* β_{n+1}.

Écrivons à présent que le moment de la pression sur $A_{n+1} B_{n+1}$ par rapport au point O est égal à la somme des moments des forces dont elle se compose.

Le moment de cette force est

$$-Y_{n+1}\left(\frac{\varepsilon_n}{6} + \frac{2\alpha_{n+1} - \beta_{n+1}}{3}\right).$$

Or la force qui agit en i_{n+1} se compose :

1° De celle qui agit en i_n et dont les composantes X_n et Y_n sont connues;

2° Du poids $A_n B_n A_{n+1} B_{n+1}$;
3° De la composante horizontale de la pression sur $B_n B_{n+1}$;
4° De la composante verticale de cette force.

Les moments de ces forces par rapport au point O sont :

$$1^\circ \qquad -h_n X_n - Y_n \frac{\varepsilon_n}{6};$$

$$2^\circ \qquad -\delta\Pi h_n \frac{\alpha_{n+1}}{2}\left(\frac{\alpha_{n+1}}{3}+\frac{\varepsilon_n}{2}\right)+\delta\Pi h_n \frac{\beta_{n+1}}{2}\left(\frac{\beta_{n+1}}{3}+\frac{\varepsilon_n}{2}\right);$$

$$3^\circ \qquad -\frac{\Pi h_n^2 y_n}{2} - \Pi \frac{h_n^2}{6}(y_{n+1}-y_n);$$

$$4^\circ \qquad \Pi \beta_{n+1} y_n \frac{\beta_{n+1}+\varepsilon_n}{2} + \Pi \frac{\beta_{n+1}}{2}(y_{n+1}-y_n)\left(\frac{2}{3}\beta_{n+1}+\frac{\varepsilon_n}{2}\right).$$

En égalant la somme de ces moments à celui de la résultante, on aura, en changeant les signes,

$$(27') \quad \left\{ \begin{aligned} & Y_{n+1}\left(\frac{\varepsilon_n}{6}+\frac{2\alpha_{n+1}-\beta_{n+1}}{3}\right) \\ & \quad = h_n X_n + \frac{\varepsilon_n Y_n}{6} \\ & \quad + \delta\Pi h_n\left[\frac{\alpha_{n+1}}{2}\left(\frac{\alpha_{n+1}}{3}+\frac{\varepsilon_n}{2}\right)-\frac{\beta_{n+1}}{2}\left(\frac{\beta_{n+1}}{3}+\frac{\varepsilon_n}{2}\right)\right] \\ & \quad + \Pi \frac{h_n^2}{6}(y_{n+1}+2y_n) \\ & \quad - \Pi \beta_{n+1}\left[y_n \frac{\beta_{n+1}+\varepsilon_n}{2}+(y_{n+1}-y_n)\left(\frac{\beta_{n+1}}{3}+\frac{\varepsilon_n}{4}\right)\right]. \end{aligned} \right.$$

En remplaçant, dans cette équation, Y_{n+1} par sa valeur (27), on aura une équation du deuxième degré à résoudre en β_{n+1}.

On voit donc que, connaissant la partie $B_{n-1} B_n$ du parement cherché, on en conclut le côté suivant $B_n B_{m+1}$.

Or, on connaît le parement vertical $B_0 B'_0$; on en déduit le côté $B'_0 B_1$, puis de proche en proche les côtés successifs.

On peut aussi disposer des deux parements de façon à satisfaire : 1° à la condition qui précède ; 2° à la condition d'avoir, dans toutes les assises, la même pression maxima R par unité de surface.

Supposons qu'on ait déterminé les deux portions $A_0 A_n$ et $B_0 B_n$ des parois ; il s'agit de déterminer les deux côtés suivants $A_n A_{n+1}$, $B_n B_{n+1}$.

Or la pression totale sur $A_{n+1} B_{n+1}$ est Y_{n+1}. Cette force étant

appliquée au tiers de $A_{n+1}B_{n+1}$ à partir de A_{n+1}, la pression en B_{n+1} est nulle ; la pression maxima est en A_{n+1} (§ 553) et est double de celle qui existerait si la pression totale Y_{n+1} était uniformément répartie. Elle est donc

$$\frac{2Y_{n+1}}{\varepsilon_n + \alpha_{n+1} + \beta_{n+1}},$$

et l'on doit avoir

$$\frac{2Y_{n+1}}{\varepsilon_n + \alpha_{n+1} + \beta_{n+1}} = R,$$

soit

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} & Y_n - \Pi h_n \left[\delta \left(\varepsilon_n + \frac{\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}}{2} \right) + y_n \beta_{n+1} (y_{n+1} - y_n) \frac{\beta_{n+1}}{2} \right] \\ & \quad = \frac{R}{2} (\varepsilon_n + \alpha_{n+1} + \beta_{n+1}). \end{aligned} \right.$$

Dans cette équation, tout est connu sauf α_{n+1} et β_{n+1}. Si l'on en tire, par exemple, la valeur de α_{n+1} et qu'on la porte dans (27'), on aura une équation du second degré à résoudre. On en cherchera la racine positive ; puis l'équation du premier degré (28) donnera la valeur correspondante de α_{n+1}.

En appliquant ce procédé de proche en proche à partir de A_0B_0, on aura les deux polygones cherchés.

§ 604.

MURS DE SOUTÈNEMENT DE TERRES. — On peut se faire *a priori* une idée de l'épaisseur moyenne à donner à un mur qui soutient des terres, par un raisonnement analogue à celui du § 600.

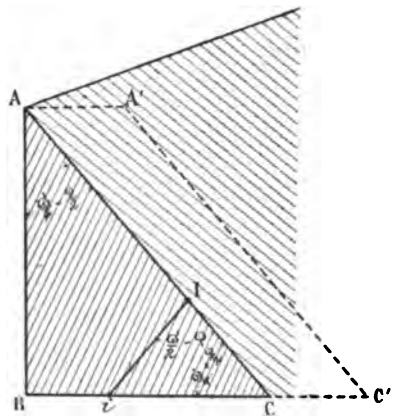
Supposons un mur ayant pour section un triangle rectangle ABC (*fig.* 19, p. 103) dont le côté AB soit vertical et le côté AC qui supporte des terres ayant l'angle de frottement φ soit incliné de l'angle $\frac{\varpi}{4} + \frac{\varphi}{2}$ sur l'horizontale.

Les terres sont supposées limitées par un talus ou par une surface peu accidentée, en sorte que la poussée est appliquée en I au tiers de CA à partir de C.

Le mur est rugueux, de sorte que la pression Ii fait l'angle φ avec la normale à AIC ou l'angle $\frac{\varpi}{2} - \varphi$ avec IC. Soit i le point de rencontre de cette force avec la base BC du mur.

Dans le triangle ICi les angles I et C sont respectivement $\frac{\varpi}{2} - \varphi$ et $\frac{\varpi}{4} + \frac{\varphi}{2}$. Donc l'angle i est aussi $\frac{\varpi}{4} + \frac{\varphi}{2}$ et ce triangle est isoscèle. De là on déduit facilement que Ci est les deux tiers de CB. Comme le poids du mur passe aussi en i, il en est de même de la résultante de ces deux forces.

Fig. 19.



Si $h = AB$ est la hauteur du mur, sa base est

$$h \operatorname{tang}\left(\frac{\varpi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right),$$

et son épaisseur moyenne est

$$\varepsilon = \frac{h}{2} \operatorname{tang}\left(\frac{\varpi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Pour $\varphi = 30°$, on a

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\varpi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{tang} 30° = \frac{\sin 30°}{\cos 30°} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Donc

$$\frac{\varepsilon}{h} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1,7}{6},$$

soit environ

$$e = 0,30\,h.$$

Pour $\varphi = \frac{\varpi}{4}$,

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\varpi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \operatorname{tang}\frac{\varpi}{8} = \frac{-1+\sqrt{2}}{2} = \frac{0,4}{2} = 0,20,$$

$$\frac{\varepsilon}{h} = 0,20.$$

On admet généralement que l'épaisseur moyenne d'un mur soutenant des terres ordinaires est dans les environs du tiers de la hauteur h. C'est voisin de ce que nous obtenons si l'on admet l'angle de frottement de 30°.

Pour des terres plus stables, la forme triangulaire permet certainement une épaisseur plus faible. On peut, pour plus de sûreté encore, accoler au triangle le parallélogramme ACA'C', de façon à obtenir la section ABA'C'.

§ 605.

DONNÉES EMPIRIQUES. — Nous extrayons des savantes Leçons de stabilité des constructions professées à l'École d'Application de Fontainebleau par M. le capitaine Ventre les indications suivantes :

« **Formules.** — Dans sa théorie analytique de la poussée des terres, le général Poncelet a donné la formule suivante, pour déterminer l'épaisseur d'un mur de revêtement,

$$e = 0,85(\mathrm{H}+h)\operatorname{tang}\left(\frac{\varpi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\sqrt{\frac{p}{p'}},$$

dans laquelle

H représente		la hauteur du mur,
h	»	la hauteur de la surcharge,
φ	»	l'angle du talus naturel,
Π	»	le poids du mètre cube de terres,
Π'	»	le poids du mètre cube de maçonnerie.

» Si l'on fait dans cette formule

$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \varphi = 45°,$$

ce qui suppose un talus naturel de 45° et ce qui donne

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\varpi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)=0,40,$$

on obtient

$$e=0,285(H+h),$$

formule souvent employée dans les avant-projets.

» Au sujet de cette formule, nous ferons les remarques suivantes :

» 1° L'hypothèse $\varphi = 45°$ s'applique à ce qu'on appelle d'ordinaire les *terres moyennes*.

» Mais le général Ardant fait observer, avec juste raison, que le talus de 45° n'est affecté naturellement par aucune espèce de remblai ameubli par la pioche, et qu'on ne peut, avec des terres meubles, de quelque nature qu'elles soient, monter un talus à 45° que par un régalage et un damage faits avec soin, en créant une cohésion factice qui se détruit au bout d'un temps plus ou moins long.

» Il serait, par conséquent, plus naturel d'introduire, dans la formule, l'angle $\frac{\varpi}{4}-\frac{\varphi}{2}$ qui correspond au talus naturel de 35°, que l'on rencontre le plus ordinairement.

» Dans ce cas, $\frac{\varpi}{4}-\frac{\varphi}{2}=55°$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\frac{\varpi}{4}-\frac{\varphi}{2}=0,05$ environ. La or mule deviendrait alors

$$e=\frac{1}{3}(H+h).$$

» 2° Lorsque la surcharge h n'est qu'une fraction de la hauteur H, ou au plus égale à H, la formule $e = 0,285(H+h)$ donne des épaisseurs admissibles. Mais, lorsque l'on a des revêtements supportant, comme cela se présente souvent, des charges de terre considérables, toujours plus grandes que H, on est conduit, en l'appliquant, à des épaisseurs évidemment exagérées. Aussi, un grand nombre de constructeurs ont-ils été conduits à des formules dans lesquelles h est affecté d'un coefficient plus petit que celui de H. C'est ainsi que M. le colonel du Génie Dambrun propose la formule

$$e=\frac{1}{3}H+\frac{1}{5}h.$$

» Nous avons, de notre côté, appliqué aux cas énumérés par M. le colonel Dambrun la construction géométrique du général Poncelet, en admettant, pour les terres, un talus naturel de 35°, et nous avons trouvé que la formule qui représenterait l'ensemble des résultats obtenus serait

$$e = \frac{1}{3}H + \frac{1}{10}h. »$$

§ 606.

VÉRIFICATION DE LA STABILITÉ D'UN MUR DE REVÊTEMENT. — En général, pour les murs de soutènement des terres, on procède comme pour les voûtes : on les établit d'après les indications empiriques qui précèdent; puis on détermine ainsi qu'il a été indiqué au Chapitre précédent la poussée qu'ils supportent. On compose cette force avec le poids du mur et l'on vérifie si la résultante passe dans le tiers moyen de la base, si elle n'est pas inclinée à plus de 30° sur la verticale et si la pression maxima qu'elle détermine sur la base ne dépasse pas la valeur-limite qu'on admet.

On peut faire ces mêmes vérifications pour diverses assises.

On pourrait se poser, pour de tels murs, les mêmes problèmes que pour les murs soutenant de l'eau (§ 604). Mais le moyen le moins long d'en obtenir une solution approchée, c'est de procéder par fausse position ou par tâtonnements; d'admettre une première inclinaison de la paroi ou des parois inconnues; de voir où cette supposition fait tomber la pression et de modifier la donnée selon que le résultat s'éloigne plus ou moins de celui qu'on recherche.

CHAPITRE V.

ACTION DU VENT SUR LES MAÇONNERIES. CHEMINÉES, TOURS, CUVES DE GAZOMÈTRES.

§ 607.

ACTION DU VENT SUR UNE SURFACE DE RÉVOLUTION. — Nous avons vu (§ 596) comment on peut construire une cheminée ou une tour de façon qu'elle soit d'égale résistance sous l'action de son propre poids et d'une pression verticale en son sommet.

Mais ces édifices doivent aussi résister à l'action du vent.

Nous savons (§ 175) que, si le vent frappe une surface plane d'une superficie égale à l'unité, sous un angle d'incidence α avec une vitesse V, la pression normale à la surface frappée qu'il produit est

$$kV^2 \cos^2 \alpha.$$

On a, en général, au plus

$$kV^2 = 113^{kg}, \tag{1}$$

sauf dans les lieux d'une grande altitude particulièrement exposés aux ouragans; là, on peut avoir (§ 485)

$$kV^2 = 273^{kg}. \tag{1'}$$

Supposons une surface courbe frappée par le vent. Rapportons-la à trois axes de coordonnées rectangulaires, l'axe des x étant pris dans la direction du vent supposée sensiblement horizontale.

Prenons un élément dS de cette surface autour d'un point dont les coordonnées sont x, y, z.

Soient α, β, γ les angles que la normale à cet élément, prolongé du côté de la pression produite par le vent, fait avec les axes.

La pression exercée sur l'élément dS est

$$p = kV^2 \cos^2 \alpha \, dS. \tag{2}$$

Ses composantes parallèlement aux axes sont

$$(3) \qquad \begin{cases} p_x = kV^2 \cos^2\alpha \, dS, \\ p_y = kV^2 \cos^2\alpha \cos\beta \, dS, \\ p_z = kV^2 \cos^2\alpha \cos\gamma \, dS, \end{cases}$$

Si

$$(4) \qquad F(x, y, z) = 0$$

est l'équation de la surface et qu'on pose

$$(5) \qquad \Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2},$$

on a

$$(6) \qquad \begin{cases} \cos\alpha = \pm \frac{1}{\Delta} \frac{\partial F}{\partial x}, \\ \cos\beta = \pm \frac{1}{\Delta} \frac{\partial F}{\partial y}, \\ \cos\gamma = \pm \frac{1}{\Delta} \frac{\partial F}{\partial z}. \end{cases}$$

Supposons, en particulier, que la surface considérée soit (*fig.* 20, p. 109) une surface de révolution autour d'un axe vertical Oz projeté horizontalement en O_0. Nous supposons que le vent souffle dans une direction horizontale parallèle à l'axe Ox; le méridien de la surface parallèle à cette ligne sera appelé le *méridien principal* et pris pour plan des xz.

Il est clair que la résultante des pressions qu'il produit sur la surface est située dans ce plan.

Les composantes p_y s'équilibreront deux à deux et il suffit de chercher la résultante des composantes p_x parallèles au vent et celle des composantes verticales p_z. Soient P_x et P_z ces deux forces. En les composant, on aura l'action totale du vent sur la surface.

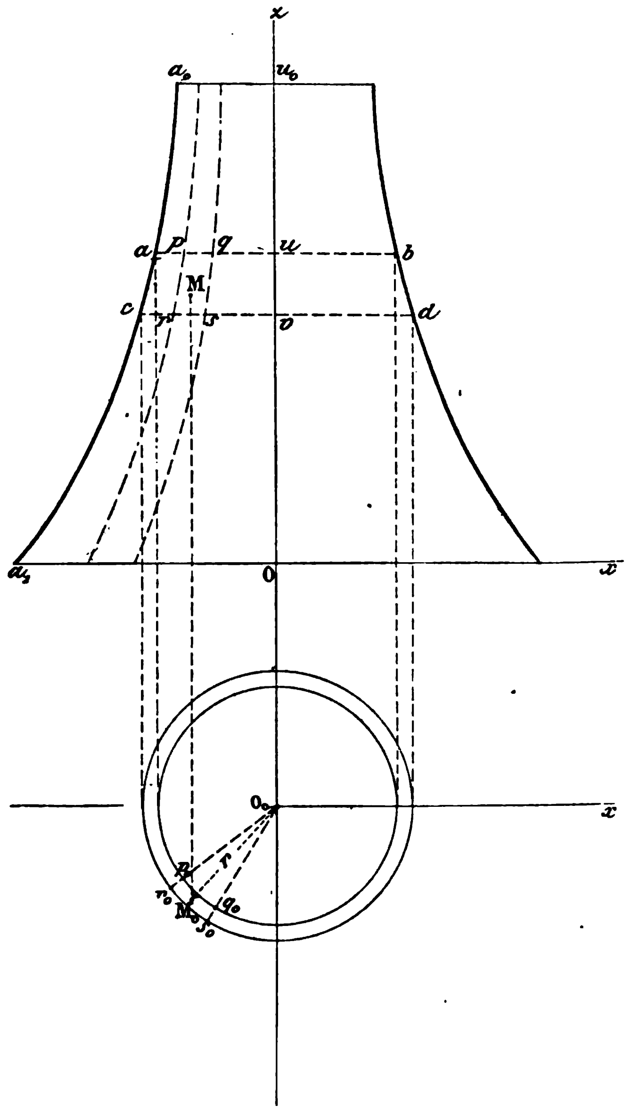
Soient r la distance à l'axe Oz d'un point M projeté horizontalement en M_0 et z son altitude au-dessus du plan des xy.

Considérons autour de ce point un élément dS ou $pqrs$ compris entre deux parallèles ab et cd de distance dz et deux méridiens ayant pour traces horizontales $O_0p_0r_0$ et $O_0q_0s_0$, formant avec le méridien principal les angles θ et $\theta + d\theta$.

On aura

$$dS = r\,d\theta\,ds,$$

Fig. 20.



ds désignant la longueur *ac* ou un élément de la courbe méridienne.

D'ailleurs, si

$$(7)\qquad z = f(x)$$

est l'équation de cette courbe, l'équation de la surface est, comme on sait,

$$(8)\qquad z = f(r).$$

D'autre part,

$$(9)\qquad \begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ x^2 + y^2 = r^2, \end{cases}$$

et, d'après les formules ci-dessus rappelées,

$$(10)\qquad \begin{cases} \mathrm{F}(x, y, z) = f(r) - z, \\ \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} = f'(r)\dfrac{dr}{dx} = f'(r)\dfrac{x}{r} = \dfrac{dz}{dr}\cos\theta, \\ \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} = \dfrac{dz}{dr}\sin\theta, \qquad \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial z} = -1, \end{cases}$$

$$\Delta = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2}$$

ou, comme

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

$$(11)\qquad \Delta = \frac{ds}{dr},$$

en comptant l'arc s de la courbe méridienne dans un sens convenable. Par suite,

$$(12)\qquad \cos\alpha = \frac{dz}{ds}\cos\theta, \qquad \cos\beta = \frac{dz}{ds}\sin\theta, \qquad \cos\gamma = -\frac{dr}{ds},$$

formules qu'on pourrait facilement établir directement.

Par suite, les composantes p_x, p_z de la pression sur l'élément $d\mathrm{S}$ ont pour expression

$$(13)\qquad \begin{cases} p_x = k\mathrm{V}^2 r\left(\dfrac{dz}{ds}\right)^2 dz\cos^3\theta\, d\theta, \\ p_z = -k\mathrm{V}^2 r\left(\dfrac{dz}{ds}\right)^2 dr\cos^2\theta\, d\theta. \end{cases}$$

On peut composer toutes les forces p_x et toutes celles p_z rela-

tivement aux divers éléments dS compris entre les parallèles ab et cd.

On aura pour résultantes des forces p'_x, p'_z ayant pour expressions

$$p'_x = \quad kV^2 r \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 dz \int_{-\frac{\varpi}{2}}^{+\frac{\varpi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta,$$

$$p'_z = -kV^2 r \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 dr \int_{-\frac{\varpi}{2}}^{+\frac{\varpi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta.$$

Or

$$\cos^3\theta = \frac{\cos 3\theta + 3\cos\theta}{4},$$

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2};$$

d'où

$$\int_{-\frac{\varpi}{2}}^{+\frac{\varpi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin\frac{3\varpi}{2} + 3\sin\frac{\varpi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} + 3\right) = \frac{4}{3},$$

$$\int_{-\frac{\varpi}{2}}^{+\frac{\varpi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{\varpi}{2}.$$

Par suite,

$$(14) \qquad \begin{cases} p'_x = \quad \frac{4}{3} kV^2 r \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 dz, \\ p'_y = -\frac{\varpi}{2} kV^2 r \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 dr. \end{cases}$$

Soit i l'angle que l'élément $ds = ab$ du méridien principal ou parallèle à la direction du vent fait avec la verticale.

On a

$$\frac{dz}{ds} = \cos i, \qquad \frac{dr}{ds} = \sin i,$$

d'où

$$(14\ bis) \qquad \begin{cases} p'_x = \quad \frac{4}{3} kV^2 r \cos^2 i\, dz, \\ p'_y = -\frac{\varpi}{2} kV^2 r \cos i \sin i\, ds. \end{cases}$$

Si le vent, au lieu de frapper la surface courbe, frappait directement le plan méridien qui lui est normal, alors, au lieu de ren-

contrer la surface courbe comprise entre les parallèles *ab* et *cd*, il rencontrerait la portion correspondante de ce plan, c'est-à-dire celle projetée verticalement en *uv* et ayant pour aire

$$2 r\, dz.$$

Elle y développerait donc une pression horizontale

$$q = 2k V^2 r\, dz.$$

Donc

$$(15) \qquad \begin{cases} p'_x = \dfrac{2}{3} q \cos^2 i, \\ p'_y = -\dfrac{\varpi}{4} q \cos i \sin i. \end{cases}$$

D'où ce théorème :

THÉORÈME. — *Lorsque le vent, soufflant horizontalement, frappe une surface de révolution à axe vertical, son action sur la portion de la surface comprise entre deux parallèles infiniment voisins a pour composantes :*

1° *Horizontale, la pression qu'il produirait s'il frappait la projection de cette portion de surface sur un plan perpendiculaire à sa direction, multipliée par les* $\frac{2}{3}$ *du carré du cosinus du demi-angle d'ouverture* i *du cône circonscrit à la surface suivant les parallèles dont il vient d'être parlé;*

2° *Verticale, cette même pression multipliée par le produit* $\frac{\varpi}{4} \cos i \sin i$.

§ 608.

APPLICATION AU CYLINDRE. — Si la surface est un cylindre de révolution, on a partout $i = 0$, d'où $p'_y = 0$ et $p'_x = \frac{2}{3} q$. Ainsi :

THÉORÈME. — *La pression exercée par le vent sur un cylindre de révolution vertical est les* $\frac{2}{3}$ *de celle qu'il exercerait sur son plan diamétral s'il le frappait normalement.*

§ 609.

APPLICATION AU CONE DE RÉVOLUTION. — Si la surface est conique, l'angle i est constant; par suite, les forces p'_x et p'_y sont l'une et l'autre proportionnelles à $r\,dz$, c'est-à-dire à l'aire $acuv$.

Donc :

1° Leurs résultantes sont proportionnelles à l'aire totale $a_0 u_0 a_1 O$, qui se réduit ici à un trapèze, puisque la méridienne $a_0 a_1$ est une droite;

2° Elles sont l'une et l'autre appliquées au point où l'horizontale du centre de gravité de cette aire coupe la droite $a_0 a_1$. Ainsi :

Théorème. — *Si le vent souffle horizontalement sur une portion de cône de révolution dont le demi-angle d'ouverture est i et dont l'axe est vertical, comprise entre deux parallèles quelconques :*

1° *La pression totale qu'il y développe est appliquée au niveau du centre de gravité du demi-trapèze placé du côté où frappe le vent, déterminé dans la surface conique par la section méridienne principale;*

2° *Les composantes horizontale et verticale de cette pression s'obtiennent respectivement en multipliant l'aire de ce demi-trapèze par* $\frac{4}{3}\cos^2 i$ *et* $\frac{\varpi}{2}\cos i \sin i$.

§ 610.

APPLICATION A UNE CLOCHE EN FORME DE CALOTTE SPHÉRIQUE. — Dans le cas d'une sphère de rayon a, comme la tangente au méridien principal en un point est perpendiculaire au rayon, on a (*fig.* 21, p. 114)

$$r = a\cos i,$$

$$z = a\sin i,$$

$$dz = a\cos i\, di.$$

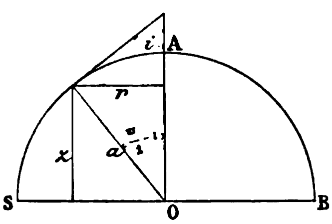
Par suite, la formule (14 *bis*) donne

$$(16)\qquad \begin{cases} p'_x = \frac{4}{3} k V^2 a^2 \cos^4 i \, di, \\ p'_y = -\frac{\varpi}{2} k V^2 a^2 \cos^3 i \sin i \, di. \end{cases}$$

Donc les composantes P'_x et P'_y de la pression totale exercée sur l'hémisphère ASB sont

$$(17)\qquad \begin{cases} P'_x = \frac{4}{3} k V^2 a^2 \int_0^{\frac{\varpi}{2}} \cos^4 i \, di, \\ P'_y = -\frac{\varpi}{2} k V^2 a^2 \int_0^{\frac{\varpi}{2}} \cos^3 i \sin i \, di; \end{cases}$$

Fig. 82.



et, si l'on appelle ξ et ζ les distances du point d'application de ces forces respectivement à la verticale et à l'horizontale du centre, on aura

$$\xi P'_y = \Sigma r p'_y, \qquad \zeta P'_x = \Sigma z p'_x.$$

ou

$$(18)\qquad \begin{cases} \xi P'_y = -\frac{\varpi}{2} k V^2 a^3 \int_0^{\frac{\varpi}{2}} \cos^4 i \sin i \, di, \\ \zeta P'_x = \frac{4}{3} k V^2 a^2 \int_0^{\frac{\varpi}{2}} \cos^4 i \sin i \, di. \end{cases}$$

On a, d'après les formules de Moivre,

$$\cos 4i = \cos^4 i - 6 \cos^2 i \sin^2 i + \sin^4 i = 1 - 8 \cos^2 i \sin^2 i$$
$$= 1 - 8 \cos^2 i + 8 \cos^4 i;$$

d'où

$$\cos^4 i = \frac{\cos 4i - 1}{8} + \cos^2 i = \frac{\cos 4i - 1}{8} + \frac{\cos 2i + 1}{2}$$

et

$$\int_0^{\frac{\varpi}{2}} \cos^4 i \, di = \frac{3}{16}\varpi.$$

D'autre part,

$$\int \cos^3 i \sin i \, di = -\frac{\cos^4 i}{4},$$

$$\int \cos^4 i \sin i \, di = -\frac{\cos^5 i}{5}.$$

Les équations (17) et (18) donnent donc

$$P'_x = \frac{\varpi}{4} k V^2 a^2,$$

$$P'_y = -\frac{\varpi}{8} k V^2 a^2,$$

$$\xi = \frac{4}{5} a, \qquad \zeta = \frac{4}{15\varpi} a.$$

La force horizontale est la moitié de la pression que produirait le vent s'il frappait normalement une section diamétrale de la sphère; la force verticale est le quart de cette même expression.

§ 611.

Remarques. — Connaissant la pression que le vent exerce sur des maçonneries de forme donnée, on peut en vérifier la stabilité comme on l'a fait pour celles qui supportent une pression d'eau.

Habituellement, les constructions (cheminées, tours) s'écartent peu de la forme cylindrique et l'on n'a pas égard à la composante verticale du vent.

La pression exercée sur une cheminée est les $\frac{2}{3}$ de celle qui se produirait si le vent en frappait normalement la section diamétrale.

Pour la stabilité, il faut que la résultante de cette pression qui passe au milieu de la hauteur de la cheminée et de son poids

coupe la base à l'intérieur du noyau central, soit à l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{R}{4}(1 + m^2)$, R et mR étant respectivement les rayons des circonférences extérieure et intérieure de la base.

On peut se proposer au sujet de la pression du vent des problèmes de stabilité analogues à ceux du § 537.

TROISIÈME SECTION.

SYSTÈMES RÉTICULAIRES A LIGNES OU CONDITIONS SURABONDANTES.

CHAPITRE VI.

THÉORIE CINÉMATIQUE ET MÉCANIQUE DES DÉPLACEMENTS DANS LES SYSTÈMES RÉTICULAIRES EN GÉNÉRAL.

§ 612.

LEMMES DE GÉOMÉTRIE. — LEMME I. — *Si deux côtés* AB *et* AC *d'un triangle conservent leurs longueurs et que la longueur* a *du troisième côté varie d'une quantité infiniment petite* α, *la variation que subit l'angle opposé* A *s'obtient en divisant* α *par la hauteur correspondante du triangle.*

L'angle A *croît d'ailleurs ou décroît suivant que le côté opposé* $BC = a$ *s'allonge ou se contracte, c'est-à-dire suivant que* α *est positif ou négatif.*

En effet, soit (*fig.* 22, p. 118) ABC un triangle dont les côtés opposés aux angles A, B, C sont a, b, c. On a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Supposons à présent que le côté a devienne $a+\alpha$, α étant positif ou négatif, les deux autres côtés conservant leurs longueurs, et soit δA la variation correspondante de l'angle A.

Dans le nouveau triangle, on aura

$$(a+\alpha)^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A+\delta A).$$

Retranchant la première égalité de la seconde et négligeant le

terme en α^2,

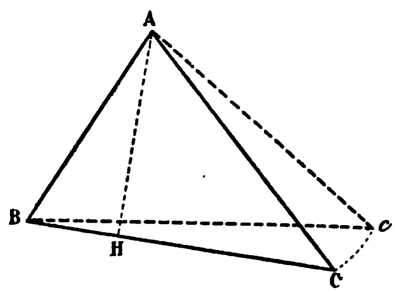
$$a\alpha = -bc[\cos(A + \delta A) - \cos A],$$
$$a\alpha = bc \sin(A + \tfrac{1}{2}\delta A)\sin\delta A,$$

ou, comme δA est infiniment petit, on peut négliger $\frac{1}{2}\delta A$ devant A et remplacer $\sin\delta A$ par δA, d'où

$$a\alpha = bc \sin A\, \delta A.$$

Or, $bc \sin A$, étant le double de l'aire du triangle ABC, peut être remplacé par le produit ah du côté BC, par la hauteur correspondante.

Fig. 22.



Donc

$$\alpha = h\,\delta A$$

ou

$$\delta A = \frac{\alpha}{h}.$$

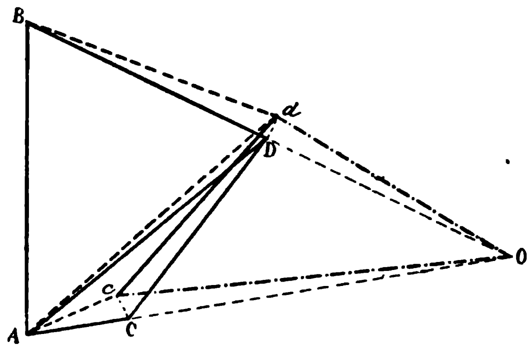
Lemme II. — *Étant donné* (*fig.* 23, *p.* 119) *un quadrilatère articulé* ABCD *dont les quatre côtés sont de longueurs invariables, on le déforme de façon que l'une des diagonales, celle* AD $= a$ *par exemple, s'allonge d'une quantité donnée* α *positive ou négative. L'accroissement positif ou négatif de l'angle des deux côtés opposés du quadrilatère, par exemple des côtés* AB *et* CD, *est égal au quotient* $\frac{\alpha}{h}$, h *étant la distance de la diagonale* AD *au point de rencontre* O *des deux autres côtés du quadrilatère.*

Les côtés du quadrilatère déformé ayant mêmes longueurs que ceux du quadrilatère ABCD, plaçons le second de façon qu'il ait

le côté AB en commun avec le premier. Soient alors c et d ses deux autres sommets. On aura

$$\begin{aligned} Ac &= AC, \\ Bd &= BD, \\ cd &= CD. \end{aligned}$$

Fig. 23.



La ligne CD de longueur invariable peut donc être amenée en cd en glissant entre les deux arcs de cercle Cc et Dd décrits des points A et B comme centres et aussi, comme on l'établit en Cinématique, par une rotation infiniment petite autour du point de rencontre O des côtés AC et BD prolongés.

Ce que l'on cherche, c'est l'angle dont a tourné CD pour venir en cd ou, ce qui revient au même, l'angle dont tournerait le triangle OCD autour de O, pour venir en Ocd. Cet angle est $d\text{OD} = c\text{OC}$.

Or, si nous considérons les deux triangles AOD et AOd, ils ont le côté AO commun, le côté $\text{OD} = \text{O}d$ et leurs troisièmes côtés Ad et AD différant de α.

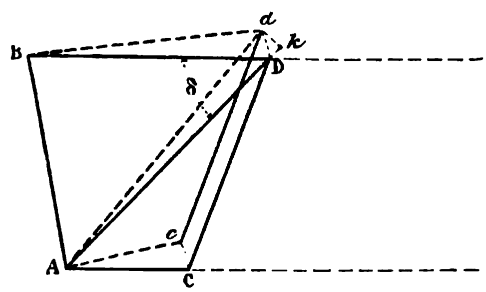
Donc, en vertu du lemme I, l'angle $\text{DO}d = \frac{\alpha}{h}$, h étant la hauteur de ce triangle mené du sommet O, l'égalité ayant lieu non seulement en grandeur, mais aussi en signe.

Remarque. — Dans le cas où (*fig.* 24, p. 120) les côtés AC et BD seraient parallèles, la règle ci-dessus deviendrait illusoire. Mais, dans ce cas, les arcs de cercle infiniment petits Cc et Dd décrits des points A et B pouvant être confondus avec des droites perpendiculaires à la direction commune de AC et de BD, la figure

CDcd, où CD $= cd$, est un parallélogramme. L'angle dont a tourné CD est donc nul; mais il est utile de connaître la grandeur Cc $=$ Dd du déplacement de translation qu'a éprouvé cette droite. Si l'on mène Ad et qu'on abaisse dk perpendiculaire sur la diagonale AD, on a D$k = \alpha$. Ainsi :

1° La translation Dd de la droite CD est perpendiculaire à la direction commune de AC et BD;

Fig. 24.



2° Sa grandeur et son sens sont tels que sa projection sur la diagonale AD représente l'allongement ou la contraction α de cette ligne; elle est

$$\mathrm{D}d = \frac{\alpha}{\sin \mathrm{ADB}} = \frac{\alpha}{\sin \delta}.$$

§ 613.

Théorème. — *Lorsqu'une barre* (que nous désignerons par la lettre a) *d'un système réticulaire* (1) *subit une dilatation positive ou négative* α, *toutes les autres barres conservant leurs*

---

(1) Nous rappelons que (§ 95) nous nommons ainsi (*fig.* 25, p. 122) un système simplement triangulé. Les pièces formant pourtour de la figure sont appelées les *pièces principales;* les pièces diagonales sont appelées *étrésillons*, ou *bracons*, ou *poinçons*.

Le sommet M opposé à une barre principale NP est le sommet du triangle NPM dont cette barre fait partie.

Nous appelons sommet opposé à une barre diagonale MP le point d'intersection Q des directions des deux barres principales PN, CM appartenant au quadrilatère dont la barre considérée MP est une diagonale (§ 203).

longueurs, le mouvement de la partie du système située d'un côté de la barre a relativement à l'autre laissée fixe est une simple rotation autour du sommet opposé à la barre a; l'angle de cette rotation est égal en grandeur et signe à $-\frac{\alpha}{h}$, *c'est-à-dire au rapport changé de signe de l'allongement positif ou négatif* α *de la barre, à sa distance h à son sommet opposé, cette distance étant elle-même comptée positivement ou négativement selon la convention du* § 205 (¹).

Considérons le système réticulaire (*fig.* 25, p. 122).

1° Supposons d'abord que la barre *a* qui s'allonge soit une barre principale supérieure NP.

Dans le triangle MNP, les longueurs des deux côtés MN, MP restent invariables et le côté NP s'allonge seul de α (l'allongement pouvant être négatif).

Supposons que le côté MN reste fixe; alors toute la partie du système réticulaire placée à gauche de MN reste aussi fixe, puisque, par hypothèse, le côté NP est le seul dont la longueur se modifie; par suite (lemme I), le côté MP tourne autour du point M d'un angle égal à la valeur du rapport $\frac{\alpha}{h}$, *h* étant la distance de NP au sommet M qui lui est opposé, en entraînant avec lui toute la partie MPA′ du système réticulaire située à sa droite, de sorte que toute cette partie tourne relativement à la partie de gauche laissée fixe, de l'angle indiqué.

Convenons de compter les rotations positivement ou négativement suivant qu'elles ont lieu de gauche à droite (sens des aiguilles d'une montre) ou de droite à gauche.

On voit alors que, si α est positif, c'est-à-dire si NP s'allonge, la rotation sera elle-même positive, et *vice versa*, et comme, d'après nos conventions, *h* est ici négatif, l'angle de la rotation sera bien $-\frac{\alpha}{h}$.

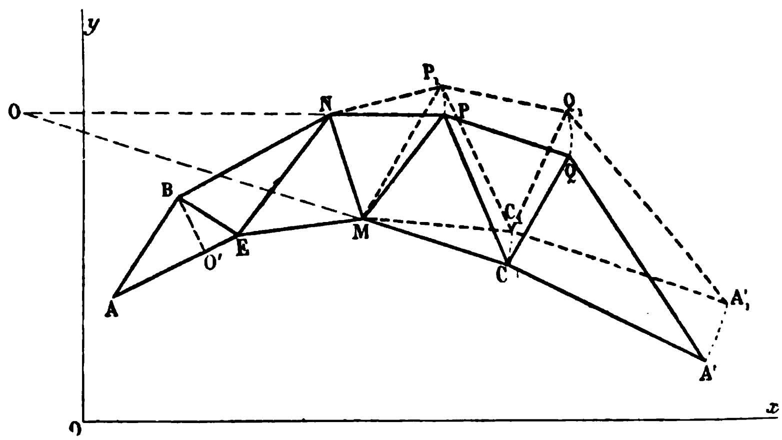
(¹) Cette convention consiste à regarder *h* comme positif ou négatif, selon que le sommet opposé à la barre considérée est au-dessus ou au-dessous de cette barre (voir, pour plus de détails, la première Partie, § 203).

2° Le même raisonnement subsisterait s'il s'agissait d'une barre principale inférieure. Alors h serait positif; mais la rotation serait de signe contraire à α et, par suite, encore égale à $-\frac{\alpha}{h}$.

3° Supposons enfin que la barre qui subit un allongement α soit un étrésillon MP.

Considérons le quadrilatère MNPC dont les quatre côtés sont de longueurs invariables, sa diagonale MP changeant seule.

Fig. 25.



Admettons que le côté MN et, par suite, toute la partie du système réticulaire placée à gauche de cette ligne restent fixes, que le côté PC se déplace infiniment peu de façon à venir occuper une position P_1C_1, telle que la nouvelle diagonale MP_1 ait une longueur $MP + \alpha$, la ligne PC entraînant avec elle toutes les barres situées à sa droite.

Le mouvement de toute cette figure invariable PCA' sera une rotation infiniment petite autour du centre instantané O de la ligne PC, c'est-à-dire autour du point que nous avons appelé le *sommet opposé à la barre* MP, et il résulte du lemme II que l'angle dont elle a tourné est égal à la valeur absolue de $\frac{\alpha}{h}$, h étant la distance de ce point O à la ligne MP.

On voit d'ailleurs qu'ici la rotation autour de O qui amène toute la figure PCA' en $P_1C_1A'_1$ a lieu de droite à gauche pour un

observateur placé en O; elle est donc négative. D'ailleurs, $MP_1 = MP + \alpha$ est plus grand que MP, c'est-à-dire que α est positif; h est aussi positif, puisque le sommet O opposé à la barre MP est au-dessus de celle-ci; donc la rotation est bien encore égale à $-\frac{\alpha}{h}$.

On vérifierait la proposition de même pour un étrésillon NM incliné en sens contraire.

Remarque I. — Si les deux barres principales NP, MC étaient parallèles, le point O passerait à l'infini. On aurait $h = \infty$ et $\frac{\alpha}{h} = 0$. Nous avons vu, en effet (remarque faite à la suite du lemme II), que dans ce cas il n'y a pas rotation, mais simple translation d'une partie de la figure relativement à l'autre.

Lorsque l'on considère une poutre ou un arc de hauteur constante, cette circonstance se présentera pour tous les étrésillons. Ainsi :

Théorème. — *Dans une pièce (arc ou poutre) de hauteur constante, les dilatations ou contractions des étrésillons ne produisent pas de rotations élastiques ou de rotations des portions de la pièce les unes relativement aux autres, mais de simples translations ou* glissements; *les dilatations ou contractions des barres principales produisent seules des rotations relatives ou* flexions.

Si la pièce, sans être de hauteur rigoureusement constante, est de hauteur progressivement et lentement variable, ce qui a lieu le plus souvent dans la pratique, ce théorème s'applique encore approximativement.

C'est pourquoi on néglige souvent, dans la pratique, les rotations dues aux variations de longueur des étrésillons.

§ 614.

COMPOSITION DES DÉPLACEMENTS DES NŒUDS D'UN SYSTÈME RÉTICULAIRE, EN FONCTION DES ALLONGEMENTS DES BARRES. — Considérons (*fig.* 25, p. 122) un système réticulaire quelconque AA'. On suppose d'abord le nœud extrême de gauche A fixe, ainsi que la direction

de la barre AE (non sa longueur). On se donne les dilatations et contractions de toutes les autres barres et l'on demande de déterminer le déplacement qui en résulte pour un nœud quelconque M.

Si une seule barre a s'allonge de α, toutes les autres conservant leurs longueurs, il y a deux cas à distinguer, suivant que cette barre est issue du point M ou placée à la droite de celles qui émanent de M ou à leur gauche. Dans le second cas, le point M ne se déplacera pas. Ainsi, si la barre PQ s'allonge, toutes les autres barres conservant leurs longueurs, la barre AB étant supposée fixe, toute la figure ABPM, qui reste, par hypothèse, de forme invariable, sera aussi fixe, et c'est seulement la partie PCA′ qui se meut.

Si, au contraire, une barre a telle que NB s'allonge de α, toutes les autres conservant leurs longueurs, toute la partie ENA′ de la figure tournera d'un angle $-\frac{\alpha}{h}$ autour du sommet E opposé à la barre considérée.

Outre les barres situées à la droite de M, il faut considérer celles émanant du point M lui-même. On voit que la barre ME fournira une rotation autour de N, à laquelle participera le point M. De même, l'allongement de l'étrésillon MN fournira une rotation autour du sommet opposé à cette ligne, la partie NEA de la figure restant fixe, mais le point M se mouvant.

La barre MP donne lieu à une rotation autour de N, ou la partie NMA de la figure et, par suite, le point M restent fixes; de même, l'allongement de la barre NP ne donne pas de mouvement pour le point M.

Il y a encore une remarque à faire au sujet de l'effet produit sur le point M, par l'allongement de la barre extrême de gauche AE supposée de direction constante. Le point E se meut sur la direction fixe AE; de plus, la longueur AB est constante. Donc le centre instantané de la rotation est ici en O′, à la rencontre de la perpendiculaire élevée en B à AB avec la droite AE (prolongée s'il y a lieu), et la rotation autour de O′ est $\frac{\alpha}{h}$, h étant la distance O′B comptée positivement si O′ est au-dessus de AB.

Moyennant ces observations, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Théorème. — *Si le nœud extrême de gauche* A *d'un système réticulaire est fixe, si de plus l'une des barres* AE *issues de ce nœud conserve une direction invariable, le mouvement d'un nœud quelconque* M *dû aux dilatations positives ou négatives de toutes les barres du système s'obtient en composant entre elles toutes les rotations* $-\frac{\alpha}{h}$ *dues aux dilatations de celles des barres qui sont placées à la gauche du nœud considéré, en y comprenant la barre principale de gauche et l'étrésillon de gauche issus de ce point.*

Supposons à présent que la barre AE reçoive elle-même une rotation arbitraire autour du point A, toutes les barres conservant leurs longueurs, le point M y participera comme toute la figure.

Il en est de même si le point A lui-même reçoit un déplacement, toutes les barres conservant leurs grandeurs et leurs directions, ce qui imprime à la figure tout entière une translation égale au déplacement du point A. Donc :

Théorème. — *Le déplacement le plus général possible que peut recevoir un nœud* M *d'un système réticulaire qui se dilate ou se contracte sous une influence quelconque s'obtient en composant cinématiquement le déplacement de l'un des nœuds* A *placés à sa gauche (que ce soit le nœud extrême ou non) : 1° avec la rotation que reçoit l'une des barres* AE *issues de ce nœud; 2° avec toutes les rotations* $-\frac{\alpha}{h}$ *dues aux dilatations* α *des barres comprises entre celle* AE *et le point* M *(y compris la barre principale de gauche et l'étrésillon de gauche issus de ce point).*

Remarque. — On sait que deux rotations, soit parallèles, soit concourantes, se composent exactement comme des forces; de là, on conclut que les rotations, en général, se composent comme des forces. Ici, il s'agit de rotations autour d'axes tous perpendiculaires au plan de la figure et par conséquent parallèles. Elles se composent donc comme des forces parallèles. Or des forces parallèles admettent, en général, une résultante unique égale à leur somme algébrique (étant convenu que l'on compte positivement les

forces qui ont un sens convenu arbitrairement, mais une fois pour toutes dans chaque problème, et négativement celles qui ont le sens opposé) et dont le point d'application est fourni par le théorème des moments relativement à un plan ou, si l'on veut, par les formules du § 124. Par suite, il en est de même des rotations.

Rapportons donc la figure (*fig.* 25, p. 122) à un système d'axes rectangulaires quelconque Ox, Oy. Soient x', y' les coordonnées du sommet O opposé à une barre a', c'est-à-dire les coordonnées de l'axe de la rotation $-\frac{\alpha'}{h'}$ (O sera un nœud si la barre considérée est une barre principale). Désignons par x_0, y_0 les coordonnées du point A et par ω_0 la rotation arbitraire qu'on donne à la barre AE entraînant avec elle la figure tout entière.

La rotation ω_0 et les rotations $-\frac{\alpha'}{h'}$ auxquelles participe un point P se composent en une rotation unique Ω égale à leur somme, soit

$$\text{(A)} \qquad \Omega = \omega_0 - \sum_g \frac{\alpha'}{h'},$$

en désignant par $\sum_g$ une somme se rapportant à toutes les barres placées à gauche du point P que l'on considère.

Cette rotation résultante Ω a lieu autour d'un point dont les coordonnées ξ, η fournies par les formules du § 124 sont

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} \xi\Omega = \omega_0 x_0 - \sum_g \frac{\alpha'}{h'} x', \\ \eta\Omega = \omega_0 y_0 - \sum_g \frac{\alpha'}{h'} y'. \end{cases}$$

Il faut y ajouter une translation égale au déplacement du point A.

§ 615.

EXPRESSION DES COMPOSANTES DU DÉPLACEMENT D'UN NŒUD. — Soient u et v les projections sur les axes de coordonnées (*fig.* 25, p. 122) du déplacement d'un nœud Q dont les coordonnées, dans l'état naturel du système, sont x et y.

On peut obtenir directement u et v.

Soient en effet x' et y' les coordonnées du sommet O opposé à une quelconque des barres MP placées à gauche du point Q ; soient h' la distance positive ou négative du point O à la barre MP et α' l'allongement positif ou négatif de celle-ci, de sorte que l'angle ω' dont cet allongement fait tourner le point Q autour de O est

$$\omega' = -\frac{\alpha'}{h'}.$$

Supposons que les rotations positives comptées de gauche à droite aillent des y positifs vers les x positifs.

Alors les projections du déplacement du point Q dû à la rotation ω' sur l'axe Ox et l'axe Oy sont respectivement (§ **294**, IIe Partie, p. 22)

$$\omega'(y-y'),$$
$$-\omega'(x-x');$$

soit

$$-\frac{\alpha'}{h'}(y-y'),$$
$$\frac{\alpha'}{h'}(x-x').$$

Les composantes du déplacement total dû aux allongements des barres sont donc

$$-\sum_g \frac{\alpha'}{h'}(y-y'),$$
$$\sum_g \frac{\alpha'}{h'}(x-x'),$$

$\sum_g$ se rapportant à toutes les barres placées à gauche de P.

Soient u_0, v_0 les composantes arbitrairement données du déplacement du point A; x_0, y_0 ses coordonnées, ω_0 la rotation aussi arbitrairement donnée de la barre AE autour de A. Cette rotation donne encore au point P un déplacement dont les composantes sont

$$\omega_0(y-y_0), \quad -\omega_0(x-x_0).$$

Donc, on a définitivement

$$(\mathrm{C})\quad \left\{\begin{aligned} u &= u_0 + \omega_0(y - y_0) - \sum_g \frac{\alpha'}{h'}(y - y'),\\ v &= v_0 - \omega_0(x - x_0) + \sum_g \frac{\alpha'}{h'}(x - x'),\end{aligned}\right.$$

qu'on peut encore écrire

$$(\mathrm{C}_1)\quad \left\{\begin{aligned} u &= u_0 - \omega_0 y_0 + y\left(\omega_0 - \sum_g \frac{\alpha'}{h'}\right) + \sum_g \frac{\alpha'}{h'} y',\\ v &= v_0 + \omega_0 x_0 - x\left(\omega_0 - \sum_g \frac{\alpha'}{h'}\right) - \sum_g \frac{\alpha'}{h'} x'.\end{aligned}\right.$$

§ 616.

INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE. — Les formules de *pure Cinématique* qui précèdent sont indépendantes de la cause qui détermine la dilatation α des barres; que cette cause soit l'élasticité ou la chaleur ou les deux réunies, les formules subsistent pourvu que α' désigne pour chaque barre a' l'allongement *total* qu'elle a subi. Dans cet allongement, il est convenable de distinguer la partie due à la chaleur de celle due à l'élasticité.

Désignons par α' cette dernière seulement. Pour avoir l'expression de celle due à la chaleur, soit δ' le coefficient de dilatation d'une barre a', et supposons que sa température s'élève de τ' degrés centigrades à partir d'une température initiale qui sera celle de la pose des ouvrages, τ' étant négatif s'il y a abaissement de la température; alors son allongement positif ou négatif sera $\delta'\tau' a'$. Donc les formules (A) et (B) deviennent

$$(\mathrm{A}')\quad \left\{\begin{aligned} \Omega &= \omega_0 - \sum_g \frac{1}{h'}(\alpha' + \delta'\tau' a'),\\ \xi\Omega &= \omega_0 x_0 - \sum_g \frac{x'}{h'}(\alpha' + \delta'\tau' a'),\\ \eta\Omega &= \omega_0 y_0 - \sum_g \frac{y'}{h'}(\alpha' + \delta'\tau' a').\end{aligned}\right.$$

De même les formules (C) deviennent, en mettant en évidence

les effets de la température,

$$
(\mathrm{C}')\quad \begin{cases} u = u_0 + \omega_0(y - y_0) - \sum\limits_{g}\left(\dfrac{\alpha'}{h'} + \delta'\tau' a'\right)(y - y'), \\ v = v_0 - \omega_0(x - x_0) + \sum\limits_{g}\left(\dfrac{\alpha'}{h'} + \delta'\tau' a'\right)(x - x'), \end{cases}
$$

où les sommes se rapportent aux lettres accentuées. On peut les écrire comme celles (C_1), à savoir :

$$
(\mathrm{C}'_1)\quad \begin{cases} u = u_0 - \omega_0 y_0 + \left[\omega_0 - \sum\limits_{g}\left(\dfrac{\alpha'}{h'} + \delta'\tau' a'\right)\right] y + \sum\limits_{g}\left(\dfrac{\alpha'}{h'} + \delta'\tau' a'\right) y', \\ v = v_0 + \omega_0 x_0 - \left[\omega_0 - \sum\limits_{g}\left(\dfrac{\alpha'}{h'} + \delta'\tau' a'\right)\right] x - \sum\limits_{g}\left(\dfrac{\alpha'}{h'} + \delta'\tau' a'\right) x'. \end{cases}
$$

§ 617.

CHANGEMENTS DANS LES DISTANCES MUTUELLES DES NŒUDS D'UN SYSTÈME RÉTICULAIRE. — Soient (*fig.* 25 *bis*, p. 130) A_0 et M_0 les positions de deux nœuds quelconques d'un système réticulaire dans son état naturel. Soient A et M les positions qu'ils prennent après une déformation élastique du système, en sorte que leurs déplacements sont respectivement A_0A et M_0M.

Projetons les points A et M en a et m sur la ligne A_0M_0. Comme les déplacements sont très petits, l'angle ε de AM et de A_0M_0 est lui-même très petit de l'ordre des déplacements.

Par suite, la longueur AM ne diffère de sa projection que d'une quantité de l'ordre de ε^2 ou de l'ordre du carré des déplacements qu'on néglige. Donc, nous pouvons, dans les limites de l'approximation adoptée dans la théorie mathématique de l'élasticité, écrire

$$
\mathrm{AM} = am,
$$

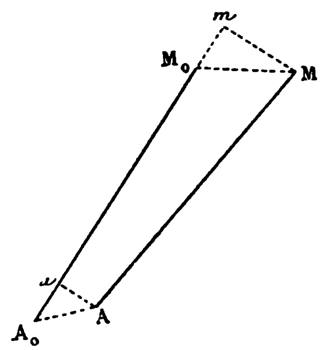
et, par suite, l'allongement positif ou négatif qu'a subi la distance A_0M_0 des deux nœuds considérés est

$$
\mathrm{AM} - \mathrm{A_0M_0} = am - \mathrm{A_0M_0} = \mathrm{M_0}m - \mathrm{A_0}a,
$$

c'est-à-dire égal à la *différence* des déplacements M_0M et A_0A des deux points *estimés suivant la direction* A_0M_0.

Cela étant, prenons la droite A_0M_0 pour axe des x, alors les projections des déplacements des deux points sur A_0M_0 sont représentées par u et u_0 et l'allongement positif ou négatif qu'a subi

Fig. 25 *bis*.



la droite A_0M_0 est représenté par la différence $u - u_0$. Et comme on suppose $y_0 = y = 0$, la formule (C) du § 615 donne

$$(C_2) \qquad u - u_0 = \sum_{g} \frac{\alpha'}{h'} y'.$$

Ainsi :

Théorème. — *Pour avoir l'accroissement positif ou négatif qui se produit dans l'écart entre deux nœuds quelconques d'un système réticulaire, par suite d'allongements quelconques donnés à tout ou partie des barres qui le composent, il suffit de multiplier l'allongement positif ou négatif* α' *de chacune des barres comprises entre les deux nœuds considérés par le rapport* $\frac{y'}{h'}$ *des distances positives ou négatives du sommet opposé à cette barre à la droite qui joint les deux nœuds considérés et à la barre elle-même et de faire la somme des produits ainsi obtenus.*

§ 618.

ALLONGEMENTS DES BARRES SURABONDANTES D'UN SYSTÈME RÉTICULAIRE EN FONCTION DES ALLONGEMENTS DES BARRES DU SYSTÈME. — Considérons

à présent un système réticulaire à k lignes surabondantes, soit un système à n nœuds renfermant $2n - 3 + k$ lignes.

Nous supposons, comme cela arrive en général, dans la pratique, que parmi ces lignes il en existe $2n - 3$ formant un système simplement triangulé ou réticulaire.

Connaissant les allongements positifs ou négatifs des barres qui le composent, on peut trouver l'accroissement de distance qui en résulte pour deux nœuds quelconques, c'est-à-dire l'allongement d'une barre surabondante joignant ces nœuds ; de sorte qu'en vertu de la formule (C_2), en appelant ΔAB l'allongement d'une barre surabondante AB joignant deux nœuds quelconques A, B, on a, en supprimant les accents,

$$(C_3) \qquad \Delta AB = \sum_A^B \frac{\alpha}{h} y,$$

où $\sum_A^B$ exprime une somme se rapportant à toutes les barres comprises entre les extrémités A et B de celle que l'on considère ; α l'allongement de l'une de ces barres, h sa distance à son sommet opposé et y la distance de ce même sommet à la barre AB.

Cette formule est facile à retenir et s'obtiendrait d'ailleurs tout de suite en observant que le déplacement du point B par rapport à celui A supposé fixe résulte des rotations $-\frac{\alpha}{h}$ autour des sommets opposés aux barres comprises entre A et B.

§ 619.

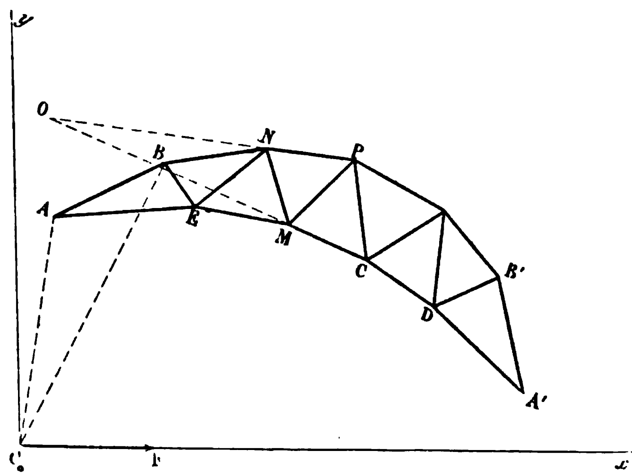
CONSTRUCTION GRAPHIQUE DES COEFFICIENTS QUI ENTRENT DANS LES FORMULES. — Les coefficients $\frac{1}{h}$, $\frac{x}{h}$, $\frac{y}{h}$ qui entrent dans les formules des rotations et des déplacements peuvent se construire graphiquement en grandeur et signe à l'aide de deux théorèmes que nous allons établir.

Théorème I. — *Le coefficient $\frac{1}{h}$ relatif à une barre a d'un système réticulaire est égal en grandeur et signe à la tension (positive ou négative) que ferait naître dans cette barre un couple de moment $+1$ appliqué à l'extrémité de gauche de la pièce supposée encastrée à son extrémité de droite.*

Soit (*fig.* 26) un système réticulaire quelconque; quelles que soient les forces qui le sollicitent et les appuis sur lesquels il repose, supprimons-les par la pensée et regardons-le comme encastré à son extrémité de droite, c'est-à-dire regardons le point A' comme fixe, ainsi que la direction de la barre A'B', tous les autres points du système étant libres.

Concevons qu'on prenne un point arbitraire C_0 et qu'on le relie invariablement à la pièce, par exemple, par deux barres fictives C_0A et C_0B, de sorte que l'ensemble C_0ABA' forme un système réticulaire encastré suivant A'B' et libre à son extrémité C_0.

Fig. 26.



Donc nous pouvons, par les procédés graphiques développés au § 95, trouver les tensions que produisent, dans ce système, des forces données quelconques.

Supposons qu'on choisisse, comme forces extérieures données, deux forces appliquées respectivement en C_0 et en A et formant un couple de moment $+1$, c'est-à-dire tendant à faire tourner son bras de levier de gauche à droite.

Désignons par χ la tension positive ou négative que déterminent ces deux forces dans une barre quelconque a, en sorte que χ est une force connue graphiquement et comptée positivement si c'est une tension.

Mais nous pouvons aussi calculer cette force par le théorème de Ritter (§ 204) qui donne en grandeur et signe

$$\chi = \frac{M}{h},$$

M désignant la somme des moments relativement au sommet opposé à la barre considérée des forces extérieures agissant à gauche de celle-ci.

Mais ici, les seules forces agissantes étant deux forces formant un couple de moment $+1$, on a, quelle que soit la barre considérée, $M = 1$. Donc

$$\chi = \frac{1}{h}.$$

THÉORÈME II. — *Étant donnés deux axes rectangulaires quelconques* C_0x, C_0y, *situés dans le plan d'un système réticulaire* (*fig.* 26, p. 132), *si l'on désigne par* x *et* y *les coordonnées du sommet opposé à une barre* a *et par* h *la distance positive ou négative de ce même sommet à la barre elle-même, et que l'on compte les moments positifs, en allant des* y *positifs vers les* x *positifs, la quantité* $\frac{y}{h}$ *est égale en grandeur et opposée en signe à la tension que fait naître dans cette barre une force de grandeur* 1 *appliquée à l'origine des coordonnées* C_0, *suivant* C_0x, *le point* C_0 *étant supposé invariablement lié à l'extrémité de gauche* AB *du système réticulaire et celui-ci étant encastré par son extrémité de droite.*

De même la quantité $\frac{x}{h}$ *est égale en grandeur et signe à la tension produite dans les mêmes conditions par une force de grandeur* 1 *appliquée suivant* C_0y.

Supposons toujours le système C_0AA' libre à son extrémité de gauche et encastré suivant la barre extrême de droite $A'B'$.

Le point C_0, origine des coordonnées, étant relié aux deux points A et B, appliquons suivant C_0x une force CF égale à l'unité. Nous pouvons déterminer graphiquement les tensions qu'elle détermine dans les diverses barres. Soit λ celle produite dans une barre quelconque MP dont le sommet opposé soit le point O ayant pour coordonnées x et y.

Le théorème de Ritter donne

$$\lambda = \frac{M}{h}.$$

Mais M se réduit ici au moment de la force C_0F relativement au point O Si l'on compte les moments positifs des y vers les x, soit de gauche à droite sur la figure, on a

$$M = -C_0F \times y = -y,$$

d'où

$$\lambda = -\frac{y}{h}.$$

On aurait de même, en appelant λ' les tensions dues à ne force 1 appliquée suivant C_0y,

$$\lambda' = \frac{x}{h}.$$

Remarque I. — Si l'axe des x est dirigé suivant AA', le triangle BCA' devient inutile et il suffit d'appliquer la force 1 au point A' dans le sens A'A.

Remarque II. — Dans ce qui précède, nous avons regardé les rotations comme positives de gauche à droite. Si l'on faisait l'hypothèse inverse, cela changerait les signes des deux membres des équations (A) ci-dessus. Donc ces équations sont indépendantes de cette convention. Mais, si l'on comptait les moments positifs des x positifs vers les y positifs, les deux dernières équations seraient remplacées par

$$\lambda = \frac{y}{h}, \qquad \lambda' = -\frac{x}{h}.$$

§ 620.

NOUVELLE FORME DONNÉE A L'EXPRESSION DE L'ALLONGEMENT D'UNE BARRE SURABONDANTE. — Soit à trouver dans une pièce réticulaire quelconque l'allongement d'une barre surabondante AB joignant deux nœuds quelconques A et B d'un système réticulaire par suite d'allongements donnés α des barres du système. Nous avons vu que cet allongement a pour expression

$$\Delta \mathrm{AB} = \sum_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{\alpha}{h} y.$$

Appliquons aux deux points A et B deux forces égales, dirigées suivant AB, toutes deux de grandeur égale à l'unité de force et tendant à écarter les points A et B, c'est-à-dire dirigées comme seraient des forces remplaçant une tension $+1$ de la barre si on la coupait près de ses extrémités et qu'on enlevât la partie moyenne de façon à ne laisser subsister que les deux bouts attenant aux nœuds A et B. Supprimons toutes les autres forces agissant sur le système et supposons-le libre et en équilibre sous l'action des deux forces fictives dont nous venons de parler.

Nous pouvons trouver graphiquement les tensions qui en résultent sur les barres du système réticulaire.

Soit λ la tension positive ou négative ainsi produite sur la barre caractérisée par les lettres α, y, h. On a par le théorème de Ritter

$$\lambda = \frac{\mathrm{M}}{h} = \frac{y}{h}.$$

Donc

$$(\mathrm{C}_3) \qquad \Delta \mathrm{AB} = \sum_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \lambda \alpha.$$

On peut encore écrire

$$(\mathrm{C}_4) \qquad \Delta \mathrm{AB} = \Sigma \lambda \alpha,$$

la somme Σ s'étendant à toutes les barres du système, car il est évident que, sur les barres non comprises entre les points A et B, les tensions produites λ sont nulles, de sorte qu'elles ne donnent rien dans la somme.

THÉORÈME. — *Pour avoir l'allongement positif ou négatif d'une barre surabondante* AB *d'un système réticulaire, ou l'accroissement positif ou négatif de la distance de deux nœuds quelconques* A *et* B *du système, résultant d'allongements* α *donnés aux diverses barres qui le composent :*

1° *Appliquez aux points* A *et* B *des forces unité dirigées suivant* AB *et tendant à écarter ces points;*

2° *Cherchez graphiquement ou analytiquement les tensions* λ *que ces forces font naître sur les barres du système (elles n'en font naître que sur les barres comprises entre* A *et* B);

3° *Cherchez les travaux* $\lambda\alpha$ *de ces forces* λ *pour les allongements donnés* α, *et la somme de ces travaux représente l'allongement cherché.*

§ 621.

EXPRESSIONS DES ROTATIONS DES BARRES ET ALLONGEMENTS DES NŒUDS EN FONCTION DES TENSIONS ÉLASTIQUES DES BARRES. — Si t' est la tension qu'éprouve une barre de longueur a', de section S′ et de coefficient d'élasticité E′ sous l'action des charges, quelles qu'elles soient, que supporte une pièce, son allongement élastique correspondant est

$$\alpha' = \frac{a'}{E'S'}\,t'.$$

Par suite, les équations (A′) du § 616 deviennent respectivement

$$(D)\qquad \left\{\begin{aligned} \Omega &= \omega_0 - \sum_{g} \frac{a'}{h'}\left(\frac{t'}{E'S'} + \delta'\tau'\right),\\ \Omega\xi &= \omega_0 x_0 - \sum_{g} \frac{a'x'}{h'}\left(\frac{t'}{E'S'} + \delta'\tau'\right),\\ \Omega\eta &= \omega_0 y_0 - \sum_{g} \frac{a'y'}{h'}\left(\frac{t'}{E'S'} + \delta'\tau'\right). \end{aligned}\right.$$

De même les formules (C′), donnant les composantes u, v du

déplacement d'un nœud caractérisé par les coordonnées x, y, deviennent

$$(E)\quad \begin{cases} u = u_0 + \omega_0(y - y_0) - \sum\limits_{g} \frac{a'}{h'}\left(\frac{t}{E'S'} + \delta'\tau'\right)(y - y'), \\ v = v_0 - \omega_0(x - x_0) + \sum\limits_{g} \frac{a'}{h'}\left(\frac{t'}{E'S'} + \delta'\tau'\right)(x - x'). \end{cases}$$

Dans toutes ces formules les termes relatifs à la température disparaissent si l'on suppose toutes les barres à la température de pose de la pièce, c'est-à-dire si l'on fait $\tau' = 0$. Le facteur $\delta'\tau'$ sort des signes Σ si l'on suppose toutes les pièces homogènes et à la même température. De même, si les pièces sont homogènes, E' sort des signes Σ.

§ 622.

EXPRESSIONS DES ROTATIONS ET DÉPLACEMENTS EN FONCTION DES MOMENTS M. — Si M est la somme des moments de toutes les forces agissant à la gauche d'une barre relativement au sommet opposé à cette barre, le théorème de Ritter (§ 204) donne pour la tension de cette barre

$$t = \frac{M}{h}.$$

Par suite, les équations (D) et (E) deviennent

$$(D')\quad \begin{cases} \Omega = \omega_0 \quad - \sum\limits_{g} \frac{a'}{h'}\left(\frac{M'}{E'S'h'} + \delta'\tau'\right), \\ \Omega\xi = \omega_0 x_0 - \sum\limits_{g} \frac{a'}{h'}\left(\frac{M'}{E'S'h'} + \delta'\tau'\right), \\ \Omega\eta = \omega_0 y_0 - \sum\limits_{g} \frac{a'}{h'}\left(\frac{M'}{E'S'h'} + \delta'\tau'\right), \end{cases}$$

et

$$(E')\quad \begin{cases} u = u_0 + \omega_0(y - y_0) - \sum\limits_{g} \frac{a'}{h'}\left(\frac{M'}{E'S'h'} + \delta'\tau'\right)(y - y'), \\ v = v_0 - \omega_0(x - x_0) + \sum\limits_{g} \frac{a'}{h'}\left(\frac{M'}{E'S'h'} + \delta'\tau'\right)(x - x'), \end{cases}$$

et, si l'on fait abstraction de la température,

$$(\mathrm{D}'')\quad \begin{cases} \Omega = \omega_0 \quad - \sum_g \frac{M'a'}{E'S'h'^2}, \\ \Omega\xi = \omega_0 x_0 - \sum_g \frac{M'a'}{E'S'h'^2}, \\ \Omega\eta = \omega_0 y_0 - \sum_g \frac{M'a'}{E'S'h'^2}, \end{cases}$$

$$(\mathrm{E}'')\quad \begin{cases} u = u_0 + \omega_0(y - y_0) - \sum_g \frac{M'a'}{E'S'h'^2}(y - y'), \\ v = v_0 - \omega_0(x - x_0) - \sum_g \frac{M'a'}{E'S'h'^2}(x - x'), \end{cases}$$

qui ont ceci de remarquable que les distances h' n'y entrent plus qu'au carré, et que, par suite, il est inutile de tenir compte de leurs signes conventionnels (§ 205).

§ 623.

EXPRESSIONS APPROCHÉES DES ROTATIONS ET DÉPLACEMENTS EN FONCTION DES MOMENTS DE FLEXION. — Dans les termes des sommes $\sum_g$ relatifs aux barres principales, M′ représente les moments relatifs aux *nœuds* opposés à ces barres.

Dans les termes relatifs à des étrésillons, M′ est une somme de moments relative à un point o (*fig.* 25, p. 122) qui ne fait pas partie de la pièce. Ce n'est donc plus un moment de flexion.

Supposons qu'on néglige les allongements des étrésillons comme étant toujours très faibles par rapport à ceux des barres principales. Alors les sommes ci-dessus, au lieu de s'étendre à toutes les barres placées à gauche du point que l'on considère, s'appliquent seulement aux barres principales, et, dans chaque terme, M′ désigne un moment de flexion.

§ 624.

EXPRESSIONS DES ALLONGEMENTS DES BARRES SURABONDANTES EN FONCTION DES TENSIONS ET DES MOMENTS M. — L'allongement ΔAB d'une

barre réelle ou fictive joignant deux nœuds A et B, dû à des allongements donnés α des barres du système, est (§ 620)

$$\Delta AB = \sum_A^B \frac{\alpha y}{h},$$

la somme s'étendant à toutes les barres comprises entre A et B (à toutes celles qui seraient tendues ou pressées par l'effet de deux forces égales et opposées dirigées suivant AB, le système étant supposé libre et soustrait à toute autre force) ; y étant la distance positive ou négative à AB du nœud opposé à la barre a qui subit l'allongement α, et h la distance positive ou négative de ce nœud à la barre elle-même.

Soit t la tension que prend la barre a sous l'action de forces données quelconques ; on a

$$\alpha = \frac{ta}{ES},$$

d'où

(F) $$\Delta AB = \sum_A^B \frac{a}{ES} \frac{y}{h} t.$$

D'ailleurs

$$t = \frac{M}{h},$$

d'où

(F′) $$\Delta AB = \sum_A^B \frac{a}{ES} \frac{y}{h^2} M,$$

§ 623.

RÉCIPROCITÉ DES ALLONGEMENTS DES DISTANCES MUTUELLES DES NŒUDS D'UN SYSTÈME RÉTICULAIRE. — THÉORÈME. — *Supposons deux forces égales et opposées et égales à l'unité, appliquées en deux nœuds quelconques* A_0 *et* B_0 *d'un système réticulaire, suivant la direction* A_0B_0, *attractives ou répulsives.*

Soit ΔA_1B_1 *l'accroissement qui en résulte dans la distance* A_1B_1 *de deux autres nœuds quelconques* A_1 *et* B_1.

Supposons inversement que ce soit en ces deux nœuds qu'on applique les deux forces unité attractives ou répulsives dirigées suivant la droite A_1B_1.

Soit ΔA_0B_0 *l'accroissement qui en résulte dans la distance des*

nœuds A_0 *et* B_0. *On aura*

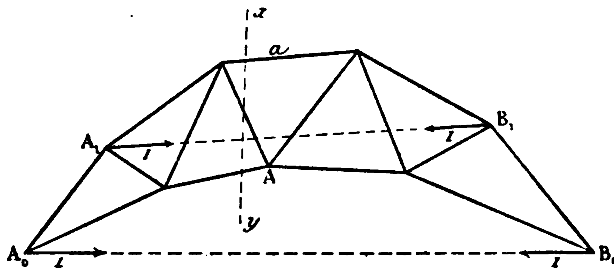
$$\Delta A_0 B_0 = \Delta A_1 B_1.$$

En effet, appliquons en deux nœuds A_1 et B_1 d'un système réticulaire (*fig.* 27) les forces unité.

Supposant le système réticulaire libre et supprimant toute autre force, cherchons l'accroissement $\Delta A_0 B_0$ qui en résulte pour la distance $A_0 B_0$. On aura, par la formule (F'),

$$\Delta A_0 B_0 = \sum_{A_0}^{B_0} \frac{a}{ES} \frac{y_0}{h^2} M,$$

Fig. 27.



en appelant y_0 au lieu de y les distances à $A_0 B_0$ des sommets A opposés aux barres a comprises entre A_0 et B_0, que ces sommets soient des nœuds ou non.

M est la somme des moments relativement à A des forces agissant à gauche d'une section xy faite dans la barre a.

Pour les barres a comprises entre A_0 et A_1, B_0 et B_1, on a évidemment $M = 0$. Pour les premières, il n'agit aucune force à leur gauche; pour les dernières, il agit deux forces $+1$ et -1 donnant une somme de moments M nulle.

Donc la somme $\sum_{A_0}^{B_0}$ se réduit à $\sum_{A_1}^{B_1}$.

Il suffit de considérer les barres a comprises entre A_1 et B_1. Pour l'une de celles-ci, on a

$$M = 1 \times y_1 = y_1,$$

en appelant y_1 la distance à la droite $A_1 B_1$ du sommet A opposé à la barre a.

Donc

$$\Delta A_0 B_0 = \sum_{A_1}^{B_1} \frac{a}{ES h^2} y_0 \times y_1.$$

Supposons à présent les forces 1 appliquées en A_0 et B_0 et cherchons l'accroissement de la distance $A_1 B_1$.

On aura par la formule (F′)

$$\Delta A_1 B_1 = \sum_{A_1}^{B_1} \frac{a}{ES} \frac{y_1}{h^2} M.$$

Mais ici

$$M = 1 \times y_0 = y_0,$$

d'où

$$\Delta A_1 B_1 = \sum_{A_1}^{B_1} \frac{a}{ES h^2} y_0 \times y_1 = \Delta A_0 B_0.$$

§ 626.

RÉCIPROCITÉ DES DÉPLACEMENTS DES NŒUDS. — Au lieu de supposer le système libre, supposons le point B_0 fixe. Alors, au lieu d'appliquer des forces 1 égales et opposées en A_0 et B_0, il revient au même d'appliquer seulement une force 1 en A_0, cette force étant dirigée vers le point fixe B_0; car cette force fera naître, dans le point fixe B_0, une réaction -1, de sorte que tout se passera comme si, le système étant libre, on avait appliqué des forces égales et opposées suivant $A_0 B_0$.

D'ailleurs, comme le point B_0 est fixe, l'allongement positif ou négatif $\Delta A_0 B_0$ ne sera autre chose que le déplacement du point A_0 estimé suivant $A_0 B_0$. Ainsi :

THÉORÈME I. — *Si, en un nœud quelconque* A_0 *d'un système réticulaire, on applique une force unité dirigée vers un point fixe* B_0 *du système et qu'il en résulte, entre deux autres nœuds quelconques* A_1 *et* B_1, *un allongement positif ou négatif* $\Delta A_1 B_1$, *en appliquant des forces unité égales et opposées en ces derniers nœuds, il en résultera, pour le point* A_0, *un déplacement qui, en projection sur* $A_0 B_0$, *sera égal à* $\Delta A_0 B_0$.

Si la première force a un sens tel qu'elle comprime la ligne $A_0 B_0$, *les secondes doivent comprimer* $A_1 B_1$ *et inversement.*

De même le point A_1 peut être fixe et alors, par un raisonnement analogue au précédent, on arrive à cette autre proposition :

THÉORÈME II. — *Si, en un nœud quelconque* A_0 *d'un système réticulaire, on applique une force* 1 *dirigée vers un point fixe* B_0 *du système et qu'il en résulte, pour un autre nœud* B_1, *un déplacement qui, estimé dans une direction allant aussi à un point fixe* B_1 *du système soit* u_1, *réciproquement, une force* 1 *appliquée en ce dernier point dans la direction* $B_1 A_1$ *imprimera au point* A_0 *un déplacement qui, estimé suivant* $A_0 B_0$, *sera aussi égal à* u_1.

Remarque. — Si le système comporte des points fixes, on peut y rattacher artificiellement d'autres parties fixes et appliquer le théorème à des forces et déplacements dirigés vers ces derniers points. Il devient ainsi

applicable à des déplacements estimés suivant des directions quelconques et pour des forces aussi de directions quelconques.

§ 627.

LES PIÈCES PLEINES DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX CONSIDÉRÉES COMME CAS PARTICULIER DES SYSTÈMES RÉTICULAIRES. — Les formules que nous venons d'établir permettent, comme nous le verrons, de résoudre, en toute rigueur, tous les problèmes que soulèvent les arcs ou poutres de hauteur constante ou variable, encastrées ou appuyées, quel que soit le nombre des appuis, lorsqu'ils forment des systèmes réticulaires. Les solutions sont analytiques ou graphiques à volonté. Quand on emploie les formules exactes, la formation des coefficients fournis par les sommes $\sum\limits_{g}$ exige des calculs numériques laborieux. L'emploi des formules approchées les simplifie. Si, en effet, les longueurs a des barres principales qui entrent seules dans les formules approchées sont comparables à la longueur totale de la construction que l'on étudie, alors il entrera dans les sommes $\sum\limits_{g}$ un petit nombre de termes et leurs calculs numériques seront peu laborieux.

Si, au contraire, les longueurs des barres sont très petites relativement aux dimensions générales de la charpente, en regardant ces longueurs comme infiniment petites, les sommes $\sum\limits_{g}$ se transforment approximativement en intégrales; les formules que l'on obtient de la sorte ne sont autres que celles établies dans la deuxième Partie d'après les hypothèses de la Résistance des matériaux. Les formules générales de la Résistance peuvent donc être regardées comme un cas particulier des formules exactes relatives aux systèmes réticulaires. C'est ce qui a été observé par Mohr et Winckler.

Considérons d'abord une pièce MNPQ (*fig.* 28, p. 142) de hauteur constante h, c'est-à-dire terminée par deux lignes équidistantes MN et PQ. Faisons nne section transversale (x) qui coupe les deux lignes matérielles MN et PQ. Désignons par S_1 et S_2 les aires des sections supposées de dimensions infiniment petites qu'elles déterminent dans ces deux lignes. Soit G le centre de gravité de ces deux aires. Le lieu des points G se nomme la *fibre moyenne* de la pièce dans le cas où le coefficient d'élasticité E est le même pour les barres supérieures MN et pour celles PQ.

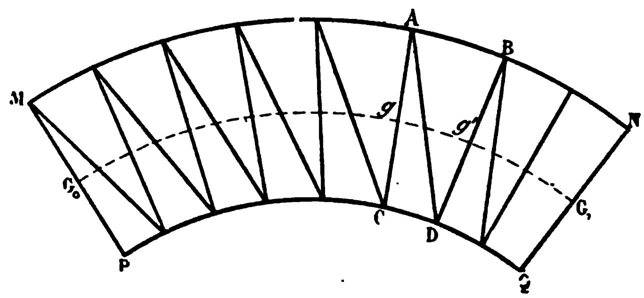
Si ces coefficients étaient différents, E_1 pour la barre supérieure et E_2 pour la barre inférieure, la fibre moyenne serait le lieu des centres de gravité G de deux masses fictives égales ou proportionnelles à $E_1 S_1$ et $E_2 S_2$ concentrées respectivement aux deux points où la section (x) coupe les lignes MN et PQ. Divisons la fibre moyenne en parties infiniment petites et, par les points de division, menons des normales telles que AC, BD, etc.

et considérons ces normales comme formant un premier système d'étrésillons, les lignes légèrement obliques telles que AD formant le second système. On a ainsi la structure d'une pièce réticulaire de hauteur constante, de sections S_1 et S_2 constantes ou variables et dont les barres principales AB, CD, etc., sont infiniment petites.

Soit s l'arc de la fibre moyenne compté à partir d'une origine fixe, par exemple de son extrémité de gauche, et $gg' = ds$ l'élément de cet arc compris entre les étrésillons AC et BD.

Nous supposons le rayon de courbure de la fibre moyenne très grand par rapport à la hauteur h de la pièce, il en résulte que les arcs AB, CD sont sensiblement égaux entre eux et à l'arc $gg' = ds$.

Fig. 28.



Pour constituer, de même, une pièce de hauteur variable, considérons (*fig.* 29, p. 143) dans un plan une courbe géométrique quelconque G_0G_1 et deux courbes matérielles MN et PQ, également quelconques, sous la seule réserve qu'une section normale à la première faite au point G découpe dans les deux autres des aires S_1 et S_2, telles que le centre de gravité de deux masses proportionnelles à E_1S_1, E_2S_2 (ou à S_1 et S_2 si $E_1 = E_2$) soit en G.

Ceci posé, dans les sommes $\sum_s$ des formules (D') du § 622, considérons d'abord les termes relatifs à l'élasticité (abstraction faite de ceux en δ relatifs à la température).

Nous aurons ainsi à considérer les trois sommes

$$\sum_s \frac{Ma}{ESh^2},$$

$$\sum_s \frac{Max}{ESh^2},$$

$$\sum_s \frac{May}{ESh^2},$$

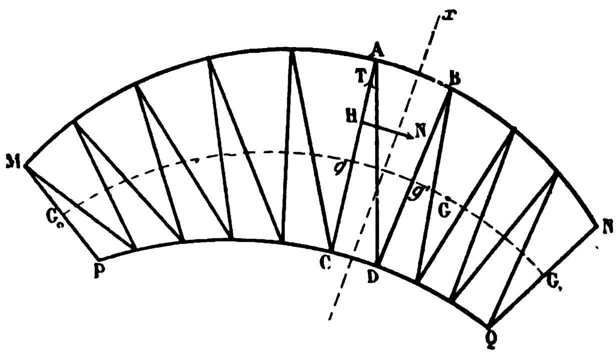
ces sommes étant à faire pour toutes les barres principales, telles que AB

et CD comprises entre l'extrémité de gauche et un point quelconque de la pièce.

Formons dans chacune de ces sommes, l'ensemble des deux termes concernant deux barres opposées AB et CD. Caractérisons par l'indice 1 ce qui concerne la première, et par l'indice 2 ce qui concerne la seconde, de sorte que les deux termes en question sont, en observant que $a_1 = a_2 = ds$,

$$(a)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{M_1}{E_1 S_1 h_1^2} + \frac{M_2}{E_2 S_2 h_2^2}\right) ds, \\ &\left(\frac{M_1 x_1}{E_1 S_1 h_1^2} + \frac{M_2 x_2}{E_2 S_2 h_2^2}\right) ds, \\ &\left(\frac{M_1 y_1}{E_1 S_1 h_1^2} + \frac{M_2 y_2}{E_2 S_2 h_2^2}\right) ds, \end{aligned} \right.$$

Fig. 29.



Dans ces expressions, S_1 et E_1 représentent la section et le coefficient d'élasticité de la barre AB; h_1 la distance de cette barre au nœud opposé C, c'est-à-dire la longueur de la normale abaissée du point C sur la tangente en A à l'arc MN; x_1 et y_1 sont les coordonnées de ce même nœud C et M_1 est le moment de flexion qui lui est relatif.

De même, S_2 et E_2 désignent la section et le coefficient d'élasticité de la barre CD, et x_2, y_2 sont les coordonnées du nœud A opposé à cette barre; M_2 le moment de flexion relatif à ce point A, et h_2 sa distance à la barre CD ou à la tangente en C à la courbe PQ.

Désignons par

$$b_2 = Ag \qquad \text{et} \qquad b_1 = Cg$$

les distances des points A et C au point g, centre de gravité des masses $E_1 S_1$, $E_2 S_2$; par x et y les coordonnées du point g et par M le moment de flexion relatif à ce point.

Soient H le point où la résultante des forces extérieures agissant sur la partie MPAC de la pièce coupe la ligne AC, N et T les composantes de cette force suivant la normale à AC et suivant cette ligne AC elle-même.

On aura par définition

$$M = N \times Hg,$$
$$M_1 = N(Hg + b_1),$$
$$M_2 = N(Hg - b_2),$$

ou

$$(b) \qquad \begin{cases} M_1 = M + b_1 N, \\ M_2 = M - b_2 N \end{cases}$$

Par suite,

$$\frac{M_1}{E_1 S_1 h_1^2} + \frac{M_2}{E_2 S_2 h_2^2} = M\left(\frac{1}{E_1 S_1 h_1^2} + \frac{1}{E_2 S_2 h_2^2}\right) + N\left(\frac{b_1}{E_1 S_1 h_1^2} - \frac{b_2}{E_2 S_2 h_2^2}\right).$$

Introduisons le moment d'inertie, par rapport au point g, de l'ensemble des deux sections S_1 et S_2 supposées de densités E_1, E_2.

Appelons EI ce moment d'inertie, E étant une constante de mêmes dimensions qu'un coefficient d'élasticité et qu'on peut choisir arbitrairement. (Si E_1 et E_2 sont les mêmes dans toute l'étendue de la pièce, on prendra pour E leur valeur commune; alors I désignera le moment d'inertie des deux surfaces S_1 et S_2 supposées de densité 1.)

On aura donc par définition

$$E_1 S_1 b_2^2 + E_2 S_2 b_1^2 = EI.$$

D'ailleurs, comme g est le centre de gravité des masses $E_1 S_1$, $E_2 S_2$,

$$E_1 S_1 b_2 - E_2 S_2 b_1 = 0;$$

d'où, en ajoutant après avoir multiplié la seconde par b_1,

$$E_1 S_1 b_2 (b_1 + b_2) = EI.$$

Soit $h = AC = b_1 + b_2$ la hauteur de la pièce au point A :

$$(c) \qquad \begin{cases} E_1 S_1 b_2 h = EI. \\ \text{De même,} \\ E_2 S_2 b_1 h = EI. \end{cases}$$

Par suite,

$$\frac{M_1}{E_1 S_1 h_1^2} + \frac{M_2}{E_2 S_2 h_2^2} = \frac{Mh}{EI}\left(\frac{b_2}{h_1^2} + \frac{b_1}{h_2^2}\right) + \frac{Nh}{EI} b_1 b_2 \left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2}\right).$$

Si la pièce est de hauteur constante, on a

$$h_1 = h_2 = h = b_1 + b_2.$$

Si la hauteur varie, on aura

$$h_1 = h \cos \varphi_1, \qquad h_2 = h \cos \varphi_2,$$

en désignant par β_1 et β_2 les angles aigus des éléments de courbes AB et gg' d'une part et CD et gg' d'autre part. Mais si, comme cela a lieu dans la pratique, ces angles sont petits parce que la hauteur des pièces ne varie que progressivement, on aura sensiblement $\cos\beta_1 = \cos\beta_2 = 1$ aux quantités près de l'ordre de $\sin^2\beta_1$ et $\sin^2\beta_2$ et la double égalité ci-dessus s'applique encore à titre d'approximation. Par suite, on aura simplement

$$(d) \qquad \frac{M_1}{E_1 S_1 h_1^2} + \frac{M_2}{E_2 S_2 h_2^2} = \frac{M}{EI}.$$

De même, à cause de (b), on aura

$$\frac{M_1 x_1}{E_1 S_1 h_1^2} + \frac{M_2 x_2}{E_2 S_2 h_2^2} = M\left(\frac{x_1}{E_1 S_1 h_1^2} + \frac{x_2}{E_2 S_2 h_2^2}\right) + N\left(\frac{b_1 x_1}{E_1 S_1 h_1^2} - \frac{b_2 x_2}{E_2 S_2 h_2^2}\right),$$

ou, en faisant $h_1 = h_2 = h$ et à cause de (c),

$$\frac{M_1 x_1}{E_1 S_1 h_1^2} + \frac{M_2 x_2}{E_2 S_2 h_2^2} = \frac{M}{EIh}(b_2 x_1 + b_1 x_2) + \frac{N b_1 b_2}{EIh}(x_1 - x_2).$$

Mais les cosinus des angles que la tangente à la fibre moyenne fait avec les axes étant $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, ceux de la normale CA comptée de C vers A sont

$$\frac{dy}{ds}, \qquad -\frac{dx}{ds}.$$

Donc les coordonnées du point A sont

$$(e) \qquad \begin{cases} x_2 = x + b_2 \dfrac{dy}{ds}, \qquad y_2 = y - b_2 \dfrac{dx}{ds}, \\ \text{et celles du point C} \\ x_1 = x - b_1 \dfrac{dy}{ds}, \qquad y_1 = y + b_1 \dfrac{dx}{ds}, \end{cases}$$

d'où

$$b_2 x_1 + b_1 x_2 = hx,$$

$$x_1 - x_2 = -h\frac{dy}{ds}.$$

Par suite,

$$\frac{M_1 x_1}{E_1 S_1 h_1^2} + \frac{M_2 x_2}{E_2 S_2 h_2^2} = \frac{Mx}{EI} - \frac{N}{EI} b_1 b_2 \frac{dy}{ds}.$$

Posons

$$E_1 S_1 + E_2 S_2 = ES.$$

Si $E_1 = E_2 = E$, S représentera l'aire totale $S_1 + S_2$ déterminée dans les barres supérieure et inférieure par une section transversale.

Les équations (c) donnent

$$S_1 b_2 = E_2 S_2 b_1 = \frac{EI}{h},$$

d'où

$$\frac{b_2}{E_2 S_2} = \frac{b_1}{E_1 S_1} = \frac{h}{ES}$$

et

$$b_1 b_2 = \frac{h}{ES} \times E_2 S_2 b_1 = \frac{h}{ES} \times \frac{EI}{h} = \frac{I}{S};$$

par suite,

$$\frac{M_1 x_1}{E_1 S_1 h_1^2} + \frac{M_2 x_2}{E_2 S_2 h_2^2} = \frac{Mx}{EI} - \frac{N\frac{dy}{ds}}{ES} = \frac{1}{E}\left(\frac{Mx}{I} - \frac{N}{S}\frac{dy}{ds}\right).$$

On trouverait de même

$$\frac{M_1 y_1}{E_1 S_1 h_1^2} + \frac{M_2 y_2}{E_2 S_2 h_2^2} = \frac{My}{I} + \frac{N}{S}\frac{dx}{ds}.$$

Ces relations et celles (d) nous donnent pour les quantités qui forment les éléments des sommes $\sum_g$ relatifs à la portion ds de la fibre moyenne

$$(a')\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{M}{EI}ds,\\ &\frac{Mx}{EI}ds - \frac{N}{ES}dy,\\ &\frac{My}{EI}ds + \frac{N}{ES}dx. \end{aligned}\right.$$

D'après les équations (D'), on a d'ailleurs pour les deux termes des sommes $\sum_g$, relatifs à l'influence de la température sur les deux barres opposées AB et CD,

$$\frac{\delta_1\tau_1 - \delta_2\tau_2}{h}ds,$$

$$\frac{\delta_1\tau_1 x_1 - \delta_2\tau_2 x_2}{h}ds,$$

$$\frac{\delta_1\tau_1 y_1 - \delta_2\tau_2 y_2}{h}ds;$$

car, pour la barre AB, on a (§ 205) $h' = +h$ et, pour la barre CD, $h' = -h$ (en négligeant, comme dans les précédents calculs, les inclinaisons mutuelles des éléments AB, CD, gg'); ou à cause des valeurs (e) de x_1, y_1, x_2, y_2,

$$\frac{\delta_1\tau_1 - \delta_2\tau_2}{h}ds,$$

$$(\delta_1\tau_1 - \delta_2\tau_2)\frac{x}{h}ds - (b_1\delta_1\tau_1 + b_2\delta_2\tau_2)\,dy,$$

$$(\delta_1\tau_1 - \delta_2\tau_2)\frac{y}{h}ds + (b_1\delta_1\tau_1 + b_2\delta_2\tau_2)\,dx,$$

où l'on peut remplacer encore b_1 et b_2 par leurs valeurs

$$b_1 = \frac{h}{\mathrm{ES}} \mathrm{E}_1 \mathrm{S}_1,$$

$$b_2 = \frac{h}{\mathrm{ES}} \mathrm{E}_2 \mathrm{S}_2.$$

Portant toutes ces valeurs dans les équations (D'), où les sommes $\sum_s$ se trouvent alors remplacées par des intégrations à effectuer le long de la fibre moyenne depuis son extrémité de gauche dont nous désignons la distance à l'origine des arcs par s_0 jusqu'au point quelconque que l'on considère, on aura

$$(\mathrm{E}) \quad \begin{cases} \Omega = \omega_0 - \displaystyle\int_{s_0}^{s} \left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} + \frac{\delta_1 \tau_1 - \delta_2 \tau_2}{h} \right) ds, \\ \Omega\xi = \omega_0 x_0 - \displaystyle\int_{s_0}^{s} \left[\left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} + \frac{\delta_1 \tau_1 - \delta_2 \tau_2}{h} \right) x \right. \\ \qquad\qquad \left. - \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{ES}} + \frac{b_1 \delta_1 \tau_1 + b_2 \delta_2 \tau_2}{h} \right) \frac{dx}{ds} \right] ds, \\ \Omega\eta = \omega_0 y_0 - \displaystyle\int_{s_0}^{s} \left[\left(\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} + \frac{\delta_1 \tau_1 - \delta_2 \tau_2}{h} \right) y \right. \\ \qquad\qquad \left. - \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{ES}} + \frac{b_1 \delta_1 \tau_1 + b_2 \delta_2 \tau_2}{h} \right) \frac{dy}{ds} \right] ds. \end{cases}$$

Supposons la pièce considérée homogène et de même température dans l'étendue d'une section transversale, homogène ou non, de température constante ou variable d'une section à l'autre.

Soient respectivement dans une section

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta, \qquad \tau_1 = \tau_2 = \tau, \qquad \mathrm{E}_1 = \mathrm{E}_2 = \mathrm{E}$$

le coefficient de dilatation par la chaleur, la température et le coefficient d'élasticité. On aura

$$\delta_1 \tau_1 = \delta_2 \tau_2 = \delta\tau,$$

et, à cause de $b_1 + b_2 = h$, les formules deviendront

$$(\mathrm{E}') \quad \begin{cases} \Omega = \omega_0 - \displaystyle\int_{s_0}^{s} \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} ds, \\ \Omega\xi = \omega_0 x_0 - \displaystyle\int_{s_0}^{s} \left[\frac{\mathrm{M}x}{\mathrm{EI}} - \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{ES}} + \delta\tau \right) \frac{dx}{ds} \right] ds, \\ \Omega\eta = \omega_0 y_0 - \displaystyle\int_{s_0}^{s} \left[\frac{\mathrm{M}y}{\mathrm{EI}} - \left(\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{ES}} + \delta\tau \right) \frac{dy}{ds} \right] ds, \end{cases}$$

qui sont pareilles à celles de la Résistance des matériaux.

CHAPITRE VII.

APPLICATION AUX POUTRES RÉTICULAIRES A UNE TRAVÉE.

§ 628.

MÉTHODE EMPLOYÉE. — Nous n'avons pas ici à nous occuper des poutres réticulaires encastrées à une extrémité et libres à l'autre, ni des poutres posées sur appuis simples, puisque la Statique fournit graphiquement les tensions des barres d'une telle pièce.

Nous n'avons donc à examiner que les poutres encastrées à un bout et posées sur appui simple à l'autre et les poutres encastrées à leurs deux extrémités.

Dans toutes les applications qui vont suivre soit aux poutres, soit aux arcs, nous négligerons les allongements des barres de remplissage comme très faibles par rapport à ceux des pièces principales. Cela simplifiera considérablement les solutions graphiques et nous permettra d'étendre aux pièces réticulaires les solutions que nous avons données pour les pièces continues.

Il serait possible, en principe, d'appliquer les mêmes méthodes au cas où l'on tient compte de l'élasticité des pièces de remplissage. Seulement les applications exigeraient certaines précautions à cause de l'éloignement des sommets opposés à ces barres.

A. POUTRE ENCASTRÉE A UNE EXTRÉMITÉ ET SIMPLEMENT APPUYÉE A L'AUTRE.

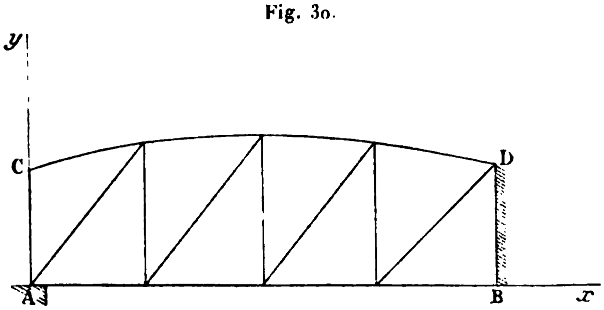
§ 629.

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Si, en chaque nœud d'une poutre de hauteur constante ou variable, encastrée à un bout et librement appuyée à l'autre, soumise à des forces quelconques, on applique une force verticale fictive égale à* $\frac{Ma}{ESh^2}$ (M *étant le*

moment de flexion en ce nœud, h la distance de ce même nœud à la barre qui lui est opposée; a, S, E *la longueur, la section et le coefficient d'élasticité de cette barre*), *cette force verticale étant descendante ou ascendante suivant que* M *est positif ou négatif, la résultante de toutes ces forces passe par l'appui simple.*

En effet, soit (*fig.* 30,) ABCD une poutre réticulaire posée sur deux appuis A et B dont l'un A simple, l'autre B encastré.

Fig. 30.



Prenons la ligne AB pour axe des x et la ligne Ay pour axe des y.

Le déplacement du point A étant nul, le déplacement v estimé parallèlement à Ay du point B dont l'ordonnée y est nulle est donné par la formule (E″) du § 622, soit

$$v = -\omega_0 l + \sum \frac{M'a'}{E'S'h'^2}(l - x')$$

ou

$$(1) \qquad v = -l\left(\omega_0 - \sum \frac{M'a'}{E'S'h'^2}\right) - \sum \frac{M'a'}{E'S'h'^2}x',$$

et la rotation Ω de la barre BD est

$$(2) \qquad \Omega = \omega_0 - \sum \frac{M'a'}{E'S'h'^2},$$

les sommes s'étendant à toutes les barres du système, et la longueur de la poutre étant l.

Mais, puisque la rotation de BD est, par hypothèse, nulle, on a

$$(3) \qquad \omega_0 - \sum \frac{M'a'}{E'S'h'^2} = 0.$$

On a d'ailleurs $v = 0$, puisque le point B ne peut pas se déplacer verticalement.

Par suite,

$$(4)\qquad v = -\sum \frac{M'a'}{E'S'h'^2} x' = 0$$

ou, en supprimant les accents,

$$(5)\qquad \sum \frac{Ma}{ESh^2} x = 0,$$

qui exprime que la somme des moments des forces fictives $\frac{Ma}{ESh^2}$ par rapport au point A est nulle ou que la résultante de ces forces passe par le point A.

Remarque I. — Si, ce que nous supposons, le coefficient d'élasticité E de toutes les barres est le même, le théorème s'applique aux forces fictives

$$\frac{Ma}{Sh^2},$$

et l'équation (5) devient

$$(5')\qquad \sum \frac{Ma}{Sh^2} x = 0.$$

Si la hauteur de la poutre est constante, le théorème s'applique aux forces fictives

$$\frac{Ma}{S},$$

et l'équation (5′) devient

$$(5'')\qquad \sum \frac{Ma}{S} x = 0.$$

Si, en outre, toutes les barres ont même longueur et même section, le théorème s'applique aux forces fictives

$$M,$$

et l'équation fondamentale devient

$$(5''')\qquad \Sigma M x = 0.$$

Remarque II. — Si l'on tenait compte de l'élasticité des barres de remplissage, le théorème fondamental s'appliquerait encore en

comprenant dans les forces fictives, celles $\frac{Ma}{ESh^2}$ à appliquer aux sommets opposés à ces diverses barres.

Si deux barres principales étaient parallèles, les forces correspondantes qui en résulteraient formeraient un couple.

§ 630.

SOLUTION GRAPHIQUE DU PROBLÈME DE LA POUTRE ENCASTRÉE A UN BOUT, APPUYÉE A L'AUTRE. — *a*. **Recherche de la ligne de fermeture.** — Supposons (*fig.* 1, *Pl. XLIV*) une poutre réticulaire AB appuyée en A et encastrée en B. Elle est soumise aux charges verticales données 1, 2, 3, 4, 5 agissant sur les nœuds supérieurs. Supposons la poutre de hauteur constante. Admettons de plus que toutes les barres principales aient même longueur a. Enfin, dans l'ignorance où l'on est *a priori* des sections des barres, on leur suppose d'abord à toutes même section, sauf à rectifier cette hypothèse ultérieurement.

Nous devons donc exprimer que la résultante des forces fictives M appliquées aux divers nœuds du système passe en A.

Ici, les nœuds supérieurs et inférieurs étant sur les mêmes verticales et les forces agissantes étant toutes verticales, les moments de flexion relativement à deux nœuds placés sur une même verticale sont égaux et, par suite, il suffit d'appliquer le théorème aux nœuds supérieurs, par exemple.

Construisons un polygone funiculaire de distance polaire arbitrairement choisie q_0 des charges données 1, 2, 3, 4, 5.

Soit $\alpha_0 1_0 2_0 3_0 4_0 5_0 \beta_0$ ce polygone et désignons par

$$z_1^0,\ z_2^0,\ z_3^0,\ z_4^0,\ z_5^0$$

les ordonnées de ses sommets comptées depuis la corde $\alpha_0\beta_0$ et par z_i^0 l'une quelconque de ces ordonnées.

S'il y avait des nœuds inférieurs P non placés sur les verticales des nœuds supérieurs, il faudrait considérer aussi les ordonnées qui leur correspondent.

Soit $\alpha_0 b_0$ la ligne de fermeture qui passe nécessairement par le point A où le moment est nul.

Si l'on appelle

$$\zeta_1,\ \zeta_2,\ \zeta_3,\ \zeta_4,\ \zeta_5$$

les ordonnées déterminées par les verticales des nœuds, entre la corde $\alpha_0\beta_0$ et la ligne de fermeture et ζ_i l'une quelconque d'entre elles, on a

$$M = q_0(z_i^0 - \zeta_i),$$

et par suite les forces verticales $z_i^0 - \zeta_i$ doivent avoir une résultante passant par le point A. On a donc à considérer les cinq forces descendantes et connues z_i^0 qui doivent être équilibrées par deux forces, à savoir : la résultante des cinq forces ascendantes inconnues ζ_i et une force aussi inconnue passant en A.

Mais la position de la résultante des forces ζ_i est évidemment indépendante de la direction de la droite αb_0. On mènera donc d'abord une droite $\alpha_0 b'_0$ arbitraire issue de α_0. On mesurera les cinq ordonnées que nous appelons ζ'_i interceptées entre elle et $\alpha_0\beta_0$ par les verticales des nœuds.

On portera ces lignes ζ'_i bout à bout comme des forces. On en construira un polygone funiculaire. Le point d'intersection des côtés extrêmes de ce polygone donnera la verticale de la résultante des forces ζ'_i et, par suite, aussi de celle des forces inconnues ζ_i.

Soient g cette verticale, V la résultante inconnue des forces ζ_i, V' la résultante ou somme arithmétique des ordonnées connues ζ'_i.

Les forces descendantes z_i^0 doivent être équilibrées par deux forces V et V_1 ayant des lignes d'action connues. On trouvera V et V_1 par la construction d'un polygone funiculaire des forces z_i^0 exactement comme au § 317.

Ayant la force V, on observe que

$$\frac{V}{V'} = \frac{\beta_0 b_0}{\beta_0 b'_0},$$

où tout est connu sauf $\beta_0 b_0$ qui s'obtiendra donc par la construction d'une quatrième proportionnelle aux trois lignes

$$V, \quad \beta_0 b'_0 \quad \text{et} \quad V' = \Sigma\zeta'_i,$$

cette dernière se trouvant sur le polygone des forces ζ'_i qui a servi à trouver la verticale g.

b. **Recherche du moment de flexion.** — Ayant la ligne $\alpha_0 b_0$, on a.

pour le moment de flexion en un point quelconque,

$$M = q_0(z^0 - \zeta) = q_0 z'^0,$$

z'_0 désignant l'ordonnée que la verticale de ce point détermine entre le polygone et sa ligne de fermeture $\alpha_0 b_0$, cette ordonnée étant comptée positivement de haut en bas à partir de $\alpha_0 b_0$. Dans le produit $q_0 z'^0$, l'un des facteurs est évalué à l'échelle des forces, l'autre à l'échelle des longueurs.

c. **Recherche de l'effort tranchant.** — L'effort tranchant T est, comme on sait,

$$T = -\frac{dM}{dx} = -q_0 \frac{dz'^0}{dx}.$$

En un point quelconque P dont la verticale coupe, par exemple, le côté $1_0 2_0$, il est égal au produit

$$-q_0 \frac{z'^0_2 - z'^0_1}{a},$$

a étant la projection horizontale de $1_0 2_0$.

d. **Recherche des réactions des appuis.** — Les efforts tranchants près de A et B représentent les réactions des appuis; donc, si R_0 et R_1 sont ces réactions en A et B, on a en valeur absolue

$$R_0 = q_0 \frac{a_0 \alpha_0 + z'^0_1}{a},$$

$$R_1 = q_0 \frac{b_0 \beta_0 - z'^0_5}{a}.$$

Supposons qu'on ait choisi $q_0 = 3a$, on aura

$$R_0 = 3(a_0 \alpha_0 + z'^0_1), \qquad R_1 = 3(b_0 \beta_0 - z'^0_5),$$

ces longueurs étant mesurées à l'échelle des forces. Si q_0 est quelconque, les réactions et efforts tranchants s'obtiennent par des quatrièmes proportionnelles à trois lignes données.

Sur l'appui B, les réactions se composent de la force verticale R_1 et d'un moment.

Puisque toutes les forces agissant sur la poutre sont en équilibre, ce moment est égal et contraire au moment de flexion en B. Comme $\beta_0 b_0$ est une ordonnée négative, ce moment est positif et

égal à la valeur absolue du produit

$$q_0 \times \beta b_0.$$

Si l'on avait pris $q_0 = h$ égal à la hauteur de la poutre, il serait représenté par un couple dont les deux forces horizontales appliquées aux nœuds D et B seraient βb_0, celle en D étant dirigée de gauche à droite, l'autre de droite à gauche.

Si q_0 est quelconque, ces deux forces seront

$$\frac{q_0 \times \beta b_0}{h}.$$

e. **Recherche des tensions des barres.** — Dès qu'on a la réaction R_0 qu'on obtient immédiatement comme il est dit ci-dessus, on peut déterminer les tensions des barres en commençant par celle de gauche, soit à l'aide d'une figure réciproque, soit à l'aide du théorème de Ritter.

Ce dernier donne par exemple pour la tension t de la barre 3.4

$$t = \frac{q_0 z'^0_3}{h},$$

h étant la hauteur de la poutre, mais *comptée négativement*, puisque le nœud 3′ est au-dessous de la barre (§ 205) : il résulte de là que les tensions des barres supérieures sont de signe contraire aux ordonnées correspondantes z'^0.

Si donc on considère la verticale du point J où la ligne $\alpha_0 b_0$ coupe le polygone funiculaire, les barres *supérieures* placées à gauche de cette verticale sont comprimées et les barres inférieures correspondantes tendues ; c'est l'inverse à droite de J.

S'il s'agit d'un poinçon 33′, une section xy faite parallèlement aux diagonales montre, en appliquant l'équation d'équilibre en projection verticale, que la tension ou pression du poinçon considéré est égale à $-$T, T étant l'effort tranchant, c'est-à-dire la somme des forces agissant à gauche de xy comptée positivement de haut en bas.

De même une section verticale coupant un étrésillon 3′.4 montre que la tension de cette barre est $\frac{T}{\cos i}$, i étant l'inclinaison de la barre sur la verticale, c'est-à-dire qu'en grandeur, si

$3'.K = T$, la tension cherchée est KK', KK' étant une horizontale.

L'effort tranchant T est d'ailleurs connu par définition même, dès que l'on connaît R_0. Pour le poinçon 3, il est

$$T = R_0 - 1 - 2 - 3.$$

§ 631.

REMARQUE SUR LE SOLIDE D'ÉGALE RÉSISTANCE. — Ayant les tensions des barres, on en détermine les sections par la condition d'égale résistance. Avec ces sections, on pourrait, comme nous allons l'indiquer, obtenir de nouvelles tensions en tenant compte de la variabilité des sections; puis, à l'aide des nouvelles tensions obtenues, corriger les sections et ainsi de suite. Mais nous verrons, dans les Notes placées à la fin du Volume, qu'en général ce calcul d'approximation successives, même si on le continuait indéfiniment, ne pourrait pas donner un solide rigoureusement d'égale résistance.

§ 632.

CAS D'UNE POUTRE DE HAUTEUR ET SECTIONS VARIABLES. — Si la section ou la hauteur de la poutre ou les longueurs des barres principales ou tous ces éléments à la fois étaient variables d'une barre à l'autre, il faudrait, au lieu d'opérer sur les forces fictives M, opérer sur celles

$$\frac{Ma}{Sh^2}.$$

On procéderait alors, comme on le fait dans les poutres pleines, lorsque le moment d'inertie est variable.

Supposons, par exemple, que les barres inférieures soient celles $A1''$, $1''.2''$, $2''.3''$, $3''.4''$, ...

Voici les opérations à faire :

1° Tracer comme ci-dessus le polygone funiculaire

$$\alpha_0 1_0 2_0 3_0 4_0 5_0 \beta_0$$

des charges données, de distance polaire arbitraire q_0.

2° Former les quotients

$$\frac{z_i^0 a}{S h^2}$$

au nombre de 10, pour les barres principales supérieures et inférieures; car ici, quoique M soit le même pour deux nœuds placés sur la même verticale, il n'en est pas nécessairement de même des quotients $\frac{Ma}{Sh^2}$.

Ainsi, pour la barre 3.4, si a est sa longueur, h la distance 3.3″ et S_a sa section, le produit $\frac{z_i^0 a}{S h^2}$, où z_i^0 se rapporte au nœud 3″ opposé à la barre est

$$(a) \qquad \frac{z_3^0 a}{S_a h^2}.$$

Pour la barre 3″.4″, si a'' est sa longueur, $S_{a''}$ sa section, h'' la longueur de la perpendiculaire abaissée du sommet 3 opposé à cette barre sur la barre elle-même, le terme à former est

$$(a'') \qquad \frac{z_3^0 a''}{S_{a''} h''^2}.$$

3° On a à considérer les forces fictives descendantes $\frac{z_i^0 a}{S h^2}$ dirigées suivant les verticales z_i^0. On voit que suivant chaque verticale on a ici deux forces (ce qui tient à ce que l'un des systèmes d'étrésillons est vertical). Ainsi, suivant z'_0, on a les deux forces (a) et (a''). On peut les ajouter et les réunir en une seule

$$(b) \qquad z_3^0\left(\frac{a}{S_a h^2} + \frac{a''}{S_{a''} h''^2}\right) = z_3''^0.$$

On voit que toujours h et h'' diffèrent très peu, ainsi que a et a'', de sorte qu'approximativement on peut, suivant chaque verticale z_3^0, appliquer la force descendante

$$(b') \qquad \frac{z_3^0 a}{h^2}\left(\frac{1}{S_a} + \frac{1}{S_{a''}}\right) = z_3''^0,$$

ou une force proportionnelle.

Si, comme il arrivera toujours, S_a et $S_{a''}$ sont sensiblement

égaux, il suffira de considérer les forces

$$(b'') \qquad \frac{z_3^0 a}{h^2 S_a} \text{ ou égale à } z_3''^0,$$

relatives aux nœuds supérieurs, comme dans le cas traité ci-dessus.

Si h ne varie pas beaucoup du milieu aux extrémités de la poutre, on peut aussi supprimer ce facteur et considérer

$$(b''') \qquad \frac{z_3^0 a}{S_a} = z_3''^0.$$

Enfin, si les longueurs a varient peu d'une barre à l'autre, on portera simplement sur chaque verticale à partir de $\alpha_0 \beta_0$ une ordonnée proportionnelle au quotient

$$(b^{\text{IV}}) \qquad \frac{z_3^0}{S_a} \text{ ou égale à } z_3''^0.$$

4° Les ordonnées $z_i''^0$ qui remplacent celles z_i^0 du § 630 étant portées de haut en bas à partir de $\alpha_0 \beta_0$, on obtient un nouveau polygone $\alpha_0 1_0'' 2_0'' 3_0'' 4_0'' 5_0'' \beta_0$.

5° On tracera une droite arbitraire $\alpha_0 b_0'$ et, si ζ_i' sont les ordonnées comprises entre $\alpha_0 \beta_0$ et cette droite, on les remplacera aussi par celles

$$(b_1) \qquad \zeta_i'\left(\frac{a}{S_a h^2} + \frac{a'}{S_{a'} h'^2}\right) = \zeta_i'',$$

Si l'on a pris l'une des expressions approchées (b'), (b''), (b'''), (b^{IV}), on prendra pour les ζ_i'' les valeurs analogues.

On formera ainsi à la place de la droite $\alpha b_0'$ un contour polygonal.

6° On cherchera la verticale g de la résultante des cinq forces ζ_i'' et la grandeur V'' de ces ordonnées, c'est-à-dire leur somme arithmétique.

7° On cherchera les deux forces V et V_1 qui, appliquées en g et A, équilibrent les forces $z_i''^0$.

8° On prendra le point b_0 de façon que

$$\frac{\beta_0 b_0}{\beta_0 b_0'} = \frac{V}{V''},$$

et l'on aura la ligne de fermeture $\alpha_0 b_0$ du polygone funiculaire $\alpha_0 1_0 2_0 3_0 4_0 5_0 \beta_0$.

Les produits des ordonnées z'_0 du polygone funiculaire, comptées depuis cette ligne par q_0, seront les moments de flexion M.

9° Ayant les moments de flexion, les opérations *purement statiques* de la recherche des efforts tranchants, réactions des appuis, tensions des barres sont les mêmes, sans changement, que pour la poutre de hauteur constante.

B. — POUTRE ENCASTRÉE A SES DEUX EXTRÉMITÉS.

§ 632.

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Si, aux divers nœuds d'une poutre encastrée à ses extrémités et soumise à des forces quelconques, on applique des forces fictives verticales*

$$\frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{ES}h^2}$$

descendantes ou ascendantes suivant que M *est positif ou négatif, ces forces se font équilibre.*

En effet, reportons-nous à la *fig.* 1, *Pl. XLIV,* en supposant que A et B soient des encastrements.

Pour le point A, on a

$$u_0 = v_0 = \omega_0 = 0.$$

De plus, comme pour le point B, Ω et v sont aussi nuls, on a, en supprimant les accents des formules (D″) et (E″) du § 622,

$$(6)\qquad \left\{ \begin{aligned} \sum \frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{ES}h^2} &= 0, \\ \sum \frac{\mathrm{M}ax}{\mathrm{ES}h^2} &= 0, \end{aligned} \right.$$

ce qui établit la proposition.

Remarque. — Si E est constant, le théorème s'applique aux forces $\frac{Ma}{Sh^2}$ et ce coefficient disparaît des équations.

De même, si la hauteur de la poutre est constante, h disparaît. Si, en outre, toutes les barres ont même longueur et même section, elles se réduisent à

$$(6') \qquad \begin{cases} \Sigma M = 0, \\ \Sigma M x = 0. \end{cases}$$

§ 633.

APPLICATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL. — L'application du théorème fondamental se fait comme dans le cas précédent et par des procédés analogues à ceux employés pour les poutres pleines. La ligne de fermeture $a_0 b_0$ (*fig.* 1, *Pl. XLIV*) ne passe plus par le point α_0. Les deux points a_0 et b_0 sont inconnus. On les détermine par la condition que les forces descendantes z_i^0, si l'on se trouve dans le cas où ce sont les moments M qui se font équilibre [équations (6')], sont équilibrées par cinq forces ascendantes égales aux ordonnées des nœuds comprises entre $\alpha_0 \beta_0$ et $a_0 b_0$.

On mène la diagonale $\alpha_0 b_0$ et l'on observe que la verticale g de la résultante de forces égales ou proportionnelles aux cinq ordonnées des nœuds comprises entre $\alpha_0 \beta_0$ et cette diagonale est indépendante de la position du point b_0 ; que de même la verticale g' de forces égales ou proportionnelles aux cinq ordonnées des nœuds comprises entre $\alpha_0 b_0$ et $a_0 b_0$ est indépendante des points a_0 et b_0.

On mènera donc une ligne $a'_0 b'_0$ entièrement arbitraire et la diagonale $\alpha_0 b'_0$. On l'utilisera pour déterminer les points g et g' ainsi que les sommes V' et V'_1 des ordonnées que détermine cette diagonale entre $\alpha_0 \beta_0$ d'une part et $a'_0 b'_0$ de l'autre, et l'on équilibrera les forces z_i^0 par deux forces V et V_1 appliquées en g et g'.

On aura alors

$$\frac{\alpha_0 a_0}{V} = \frac{\alpha_0 a'_0}{V'},$$

$$\frac{\beta_0 b_0}{V_1} = \frac{\beta_0 b'_0}{V'_1}.$$

Ayant la ligne de fermeture, les réactions verticales des appuis

et les couples de ces réactions se déterminent comme ci-dessus. Ayant la réaction verticale AC et les deux forces horizontales appliquées en A et C et formant le couple des réactions, on peut déterminer les tensions soit par une figure réciproque, soit par la méthode de Ritter.

Si la poutre était de hauteur ou de section variable, les modifications à apporter à la marche qui vient d'être indiquée seraient analogues à celles détaillées au paragraphe précédent.

Toutes ces opérations sont d'ailleurs pareilles à celles exposées à l'occasion des poutres pleines, avec cette différence qu'ici on n'a rigoureusement à considérer qu'un nombre limité de forces fictives, puisqu'il suffit d'en appliquer aux nœuds.

CHAPITRE VIII.

APPLICATION AUX ARCS RÉTICULAIRES AVEC OU SANS ENCASTREMENT.

A. — ARCS POSÉS SUR TOURILLONS SIMPLES.

§ 634.

THÉORÈME FONDAMENTAL. — 1° *Si, aux divers nœuds d'un arc posé sur tourillons simples, soumis à des forces quelconques, on applique des forces fictives*

$$(a) \qquad \frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{ES}h^2},$$

ces forces étant parallèles à la corde de l'arc, dirigé dans un sens convenu ou en sens contraire suivant que M *est positif ou négatif, leur résultante coïncide avec* AB.

2° *Si les barres sont à des températures quelconques* τ, *on doit dans l'énoncé précédent remplacer les forces fictives* $\frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{ES}h^2}$ *par celles-ci*

$$(b) \qquad \frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{ES}h^2} + \frac{\delta\tau a}{h},$$

où dans le second membre h *est positif ou négatif selon les conventions du* § 205.

3° *Si l'on voulait avoir égard à l'élasticité des barres de remplissage, les mêmes théorèmes s'appliqueraient, mais à la condition d'appliquer aussi les mêmes forces fictives* (*a*) *ou* (*b*) *aux sommets opposés à ces barres.*

En effet, appelons A et B les deux tourillons, A étant celui de gauche. Prenons la ligne AB pour axe des x, la perpendiculaire à AB pour axe des y, et appliquons les formules générales (E') du § 622.

Les composantes u_0, v_0 du déplacement du point A sont nulles.

L'allongement de la corde AB est $u - u_0 = 0$, en appelant u la composante horizontale du déplacement du point B. Or, comme l'ordonnée y de ce point est nulle, on a

$$u = \sum \left(\frac{M'a}{E'S'h'} + \frac{\delta'\tau'a'}{h'} \right) y'.$$

Le second membre où la somme Σ s'étend à toutes les barres est donc nul, ce qui donne, en supprimant les accents,

$$\sum \left(\frac{Ma}{ESh^2} + \frac{\delta\tau a}{h} \right) y = 0. \tag{1}$$

La somme des moments relativement à un point quelconque de AB de forces fictives

$$\frac{Ma}{ESh} + \frac{\delta\tau a}{h}$$

parallèles à cette ligne est donc nulle, ce qui indique qu'elles admettent une résultante coïncidant avec cette ligne.

Remarque. — Si l'on fait abstraction des effets de la température, l'équation (1) devient

$$\sum \frac{Ma}{ESh^2} y = 0. \tag{1'}$$

Si le coefficient d'élasticité E est constant, on a

$$\sum \frac{Ma}{Sh^2} = 0. \tag{1''}$$

Si l'on suppose que toutes les barres aient même section, ce qu'on fait à titre de première approximation et sauf rectification ultérieure, on a

$$\sum \frac{Ma}{h^2} y = 0. \tag{1'''}$$

Si l'arc est sensiblement de hauteur constante et si les barres principales ont sensiblement même longueur, en sorte que $\frac{a}{h^2}$ puisse être regardé comme constant, au moins dans une première

recherche, on a

$$(1^{\text{iv}}) \qquad \Sigma M y = 0.$$

§ 635.

APPLICATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL. — Supposons la corde AB horizontale et les forces données verticales. Soient μ le moment de flexion relatif à un nœud quelconque dans l'hypothèse où l'arc est simplement posé sur ses appuis à la façon d'une poutre droite et q la poussée de l'arc. On aura

$$M = \mu - qy.$$

Donc

$$\sum \frac{\mu a}{S h^2} y = q \sum \frac{a y^2}{S h^2},$$

d'où

$$(2) \qquad q = \frac{\sum \frac{\mu a}{S h^2} y}{\sum \frac{a y^2}{S h^2}}.$$

Construisons un polygone funiculaire de distance polaire arbitraire q_0 des charges données et soient z^0 les segments déterminés par les ordonnées des nœuds entre ce polygone et sa corde.

On aura

$$\mu = q_0 z^0,$$

d'où

$$(3) \qquad q = q_0 \frac{\sum \frac{a}{S h^2} z^0 y}{\sum \frac{a}{S h^2} y^2}.$$

Si la section est supposée constante,

$$(4) \qquad q = q_0 \frac{\sum \frac{a}{h^2} z^0 y}{\sum \frac{a}{h^2} y^2}.$$

Si, dans une première approximation, on regarde $\frac{a}{h^2}$ et h^2 ou le rapport $\frac{a}{h}$ comme constant dans toute l'étendue de l'arc,

$$(5) \qquad q = q_0 \frac{\Sigma z^0 y}{\Sigma y^2},$$

Cette formule est analogue à celle des arcs pleins de section constante. On la construit de même, avec cette différence qu'au lieu de diviser l'arc en un certain nombre de parties, pour remplacer des intégrales par des sommes, on n'a ici réellement à considérer que des sommes à nombre fini de termes (autant de termes qu'il y a de barres principales).

Si l'on fait abstraction de l'élasticité des barres de remplissage, à tous les nœuds on appliquera des forces égales ou proportionnelles aux ordonnées connues z^0, toutes parallèles à la corde et de même sens. Un polygone funiculaire de ces forces, de distance polaire quelconque d, qu'on disposera comme il a été dit au Chap. I, troisième Partie, donne, au facteur d près, le numérateur. Aux mêmes nœuds et dans la même direction, on appliquera des forces égales ou proportionnelles à y et un polygone funiculaire de même distance polaire donnera, au même facteur près, le dénominateur.

Dans le rapport, le facteur d disparaît et l'on obtient la poussée q par la construction d'une quatrième proportionnelle. On évite même cette construction en choisissant q_0 comme il a été dit au Chapitre susmentionné.

On peut, si on le juge commode, amplifier toutes les ordonnées y des nœuds dans un rapport arbitraire $n:1$ et appliquer les forces aux nouveaux points ainsi obtenus.

Ayant la poussée q, comme les réactions verticales sont les mêmes que pour une poutre droite à deux appuis simples et déterminées graphiquement, on détermine les tensions par la construction d'une figure réciproque.

Les tensions connues, on en déduit les sections des barres. On fera la même remarque que plus haut : le solide d'égale résistance rigoureux ne peut, en général, pas exister, comme il sera établi dans la Note I. Cette même remarque s'applique à tous les arcs que nous aurons à considérer ainsi qu'aux poutres à plus de deux appuis.

Si l'on avait à construire la formule (3), il faudrait commencer pour chaque barre par calculer les produits

$$\frac{a}{Sh^2}z^0 = z'^0,$$

$$\frac{a}{Sh^2}y = y'.$$

d'où

$$q = q_0 \frac{\Sigma z'^0 y}{\Sigma y' y}.$$

On construirait les sommes des moments des forces z'^0 et y' parallèles à la corde AB relativement à un point de cette corde comme ci-dessus.

Mais, dans ce cas, il paraît aussi simple de procéder par le calcul. On numérotera les barres principales et l'on fera un Tableau à colonnes où, pour chaque barre, on formera :

1° Le produit

$$[1] \qquad \frac{ay}{Sh^2} = y';$$

2° Le produit

$$[2] \qquad y' \times z_0;$$

3° Le produit

$$[3] \qquad y' \times y.$$

On fera la somme des nombres [2], celle des nombres [3], on divisera la première somme par la seconde; le quotient obtenu est un nombre sans dimension n.

La poussée q sera n fois la longueur q_0 mesurée à l'échelle des forces.

§ 636.

POUSSÉE DUE A LA TEMPÉRATURE. — Appliquons la formule (1), à savoir

$$\sum\left(\frac{Ma}{ESh^2} + \frac{\delta\tau a}{h}\right) y = 0.$$

Si aucune force n'agit, autre que la poussée due à la température, on a

$$M = -qy;$$

d'où

$$q \sum \frac{ay^2}{ESh^2} = \sum \frac{\delta\tau a y}{h},$$

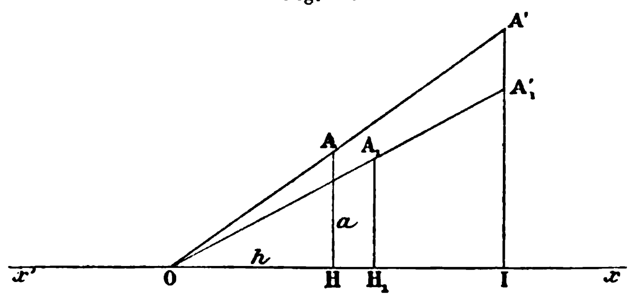
$$(6) \qquad q = \frac{\sum \frac{\delta\tau a y}{h}}{\sum \frac{ay^2}{ESh^2}},$$

ou, en supposant les barres homogènes, en sorte que le coefficient de dilatation δ et le coefficient d'élasticité soient les mêmes pour toutes, les supposant aussi toutes à une même température τ, on a

$$q = \delta\tau \mathrm{E} \frac{\sum \frac{a}{h} y}{\sum \frac{a y^2}{\mathrm{S} h^2}}.$$

Le dénominateur a déjà été construit ou calculé. Le numérateur est aisé à construire. Portons (*fig.* 30) sur une horizontale xx' une longueur $\mathrm{OH} = h$ égale à la distance qui sépare chaque nœud *supérieur* de sa barre conjuguée et sur une verticale une longueur $\mathrm{HA} = a$ égale à la longueur de cette barre.

Fig. 30.



Nous avons ainsi les droites OA, OA_1, ...

Coupons-les par une verticale placée à une distance OI de l'origine égale à un nombre simple n d'unités de longueur (échelle du dessin de l'arc). Soit $n = 3$.

Les longueurs $\frac{\mathrm{AI}}{3}$, $\frac{\mathrm{A'I}}{3}$, ... représentent les *rapports numériques* $\frac{a}{h}$.

Faisons la même opération pour les nœuds inférieurs, en nous servant de la moitié de gauche $\mathrm{O}x'$ de $\mathrm{O}x$, et notons que les nouveaux rapports ainsi obtenus doivent être pris négativement, puisque les h sont négatifs (§ 205).

Appliquons aux nœuds supérieurs, des forces parallèles à AB et représentant $\frac{a}{h}$ à l'échelle déjà adoptée pour les forces fictives qui

ont servi à construire le dénominateur, toutes dans un sens, et aux nœuds inférieurs des forces analogues dirigées en sens contraire.

On construira la somme des moments de ces forces avec la même distance polaire d qui a servi à construire le dénominateur et l'on fera le quotient des deux longueurs qui, au facteur d près, représentent le numérateur et le dénominateur.

On multipliera ce quotient par le nombre $\delta\tau E$.

On peut aussi calculer les termes en nombre fini de la somme qui forme le numérateur.

La poussée totale de l'arc s'obtiendra en ajoutant celle due aux forces à celle due à la chaleur.

B. — ARC ENCASTRÉ A UNE EXTRÉMITÉ ET LIBREMENT APPUYÉ A L'AUTRE.

§ 637.

Théorème fondamental. — *Si, aux divers nœuds d'un arc réticulaire quelconque, encastré à l'une de ses extrémités et posé sur tourillon simple à l'autre, on applique des forces fictives*

$$(a) \qquad \frac{Ma}{ESh^2},$$

parallèles, dirigées dans un sens convenu ou en sens opposé suivant que M *est positif ou négatif, le centre de ces forces parallèles coïncide avec le tourillon simple.*

2° *Si l'on a égard aux effets de la température, on doit remplacer les forces fictives ci-dessus par celles*

$$(b) \qquad \frac{Ma}{ESh^2} + \frac{\delta\tau a}{h},$$

où, dans le second terme, h est positif ou négatif selon les conventions du § 205.

3° *Si l'on a égard à la variabilité des barres de remplissage, les mêmes théorèmes s'appliquent à la condition d'ap-*

pliquer aussi les forces fictives (*a*) *ou* (*b*) *aux sommets opposés à ces barres.*

En effet, soient A le tourillon simple et B l'appui encastré, le premier supposé à gauche. Prenons toujours la ligne AB pour axe des x et la perpendiculaire à cette ligne menée en A pour axe des y.

Les composantes u_0, v_0 du déplacement du point A étant nulles, les formules (D') et (E') du § 622 donnent pour les composantes u, v du point B et la rotation Ω correspondante, en observant que pour ce point $y = 0$,

$$u = \sum \left(\frac{M'a'}{E'S'h'^2} + \frac{\delta'\tau'a'}{h'} \right) y',$$

$$v = -\omega_0 l + \sum \left(\frac{M'a'}{E'S'h'^2} + \frac{\delta'\tau'a'}{h'} \right) (l - x'),$$

$$\Omega = \omega_0 - \sum \left(\frac{M'a'}{E'S'h'^2} + \frac{\delta'\tau'a'}{h'} \right),$$

les sommes s'étendant à toutes les barres et l étant la longueur de la corde.

Or on a

$$u = v = \Omega = 0;$$

d'où, en supprimant les accents,

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum \left(\frac{Ma}{ESh^2} + \frac{\delta\tau a}{h} \right) x = \;, \\ &\sum \left(\frac{Ma}{ESh^2} + \frac{\delta\tau a}{h} \right) y = 0, \end{aligned} \right.$$

ce qui établit la proposition.

Remarque. — Si l'on fait abstraction des effets de la température, les formules se réduisent à

$$(7') \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum \frac{Ma}{ESh^2} x = 0, \\ &\sum \frac{Ma}{ESh^2} y = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour un arc homogène, E disparaît et

$$(7''')\quad \begin{cases} \sum \frac{Ma}{Sh^2} x = 0, \\ \sum \frac{Ma}{Sh^2} y = 0. \end{cases}$$

Si la section est regardée comme constante, ce qui a toujours lieu dans les premiers calculs,

$$(7''')\quad \begin{cases} \sum \frac{Ma}{h^2} x = 0, \\ \sum \frac{Ma}{h^2} y = 0. \end{cases}$$

Si enfin, dans cette première approximation, on regarde aussi $\frac{a}{h^2}$ comme sensiblement constant pour toutes les barres

$$(7^{\text{IV}})\quad \begin{cases} \Sigma M x = 0, \\ \Sigma M y = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire que le centre de forces parallèles égales ou proportionnelles à M appliquées aux divers nœuds est le tourillon A.

§ 638.

APPLICATION DU THÉORÈME GÉNÉRAL. — Ces équations étant tout à fait analogues à celles obtenues dans le cas des arcs pleins, nous pouvons étendre aux arcs réticulaires la méthode d'Eddy. Prenons d'abord le cas où l'on emploie les équations (7^{IV}).

Soit (*fig.* 2, *Pl. XLIV*) ABCD un arc réticulaire appuyé en A et encastré en B. Il est soumis à des charges verticales 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 agissant sur les nœuds supérieurs.

Je construis un polygone funiculaire $\alpha_0 1_0 2_0 \ldots \beta_0$ de distance polaire quelconque q_0 de ces charges et je détermine sa ligne de fermeture $\alpha_0 b_0$ en supposant que l'arc repose sur ses appuis comme une poutre simplement appuyée en A et encastrée en B, mais sans tenir compte de l'invariabilité de la longueur de la corde.

On satisfait ainsi à la première des équations (7^{IV}). Si z'_0 sont les ordonnées du polygone funiculaire comprises entre ce poly-

gone et sa ligne de fermeture $\alpha_0 b_0$ et que M' représente le moment de flexion qui se produirait en un nœud quelconque de l'arc s'il reposait à la façon d'une poutre encastrée à un bout (sa corde n'étant pas invariable), on aurait

$$M' = q_0 z'_0 \tag{8}$$

et, par suite,

$$\Sigma M' x = 0, \tag{9}$$

$$\Sigma z'_0 x = 0. \tag{10}$$

Je considère à présent le polygone

A.1.9.2.10.3.11.4.12.5.13.6.14.7.15.8.16.D.B,

formé par les étrésillons, et je mène les ordonnées y de ses sommets comptées depuis la corde de l'arc AB.

Je construis une ligne de fermeture AB_0, telle que des forces fictives descendantes y_1, y_2, y_3, ... égales ou proportionnelles aux ordonnées des nœuds 1, 9, 2, ... soient équilibrées par :

1° Des forces ascendantes placées aussi suivant les verticales des nœuds et égales ou proportionnelles aux ordonnées comprises entre AB et AB_0;

2° Une force verticale passant en A.

La ligne AB_0 se détermine comme celle $\alpha_0 b_0$ et comme nous l'avons indiqué à l'occasion de la poutre droite.

Si l'on appelle y' les ordonnées des nœuds, comptées depuis la ligne AB_0, ordonnées positives ou négatives suivant qu'elles sont ascendantes ou descendantes, à partir de AB_0, on aura identiquement

$$\Sigma y' x = 0, \tag{11}$$

Ceci posé, c'est un théorème de pure Statique applicable ici comme aux poutres pleines que celui qui établit (§ 200) que le moment de flexion M en un point quelconque du plan est, à une fonction linéaire près des coordonnées de ce point, égal à celui μ qui existerait si l'arc reposait sur deux appuis simples à la façon d'une poutre droite.

Le moment M′ de l'arc regardé comme poutre encastrée à un bout ne diffère de μ que par une fonction linéaire de x.

Donc M ne diffère de M′ ou de $q_0 z'_0$ que par une fonction linéaire de x et y. Mais y ne diffère de y' que par une telle fonction.

Donc M ne diffère de $q_0 z'_0$ que par une fonction linéaire de x et de y' et l'on peut écrire

$$M = q_0 z'_0 - q y' + A + B x,$$

q, A, B étant trois constantes à déterminer.

Pour $x = 0$, on a $z'_0 = 0$, $y' = 0$ et aussi $M = 0$, puisque le point A est un tourillon. Donc $A = 0$ et

$$M = q_0 z'_0 - q y' + B x.$$

On doit avoir les deux équations (7^{IV}) qui, à cause de (10) et (11), se réduisent à

$$B \Sigma x^2 = 0,$$

$$q_0 \Sigma z'_0 y - q \Sigma y' y = 0,$$

les sommes s'étendant à tous les nœuds. Comme Σx^2 est essentiellement positif, la première ne peut être satisfaite que par $B = 0$.

Donc

$$M = q_0 z'_0 - q y', \tag{12}$$

où la constante q est définie par

$$q = q_0 \frac{\Sigma z'_0 y}{\Sigma y' y}, \tag{13}$$

expression analogue à celle qui donne la poussée d'un arc à deux tourillons. On peut construire de même ou calculer les termes en nombre fini des deux sommes qui y entrent.

Si, au lieu des formules (7^{IV}), on avait à appliquer les formules ($7'$) ou ($7''$), ou ($7'''$), on emploierait, pour déterminer les deux droites de fermeture des polygones

$$\alpha_0 1_0 2_0 \ldots \beta_0 \quad \text{et} \quad A.1.9.2.10\ldots 8.16.D.B,$$

la méthode d'amplification des ordonnées (§ 632 ou 314).

Les lignes de fermeture seraient alors telles qu'on aurait iden-

tiquement,

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum \frac{a}{\mathrm{ES}h^2} z'_0 x = 0, \\ &\sum \frac{a}{\mathrm{ES}h^2} y' x = 0. \end{aligned}\right.$$

On aurait toujours

$$\mathrm{M} = q_0 z'_0 - q y'.$$

Cette expression, en vertu de (14), satisferait à la première des équations (7') quel que soit q. Et la seconde des équations (7') donnerait

$$q_0 \sum \frac{a}{\mathrm{ES}h^2} z'_0 y - q \sum \frac{a}{\mathrm{ES}h^2} y' y = 0,$$

d'où

$$(15)\qquad q = q_0 \frac{\sum \frac{a}{\mathrm{ES}h^2} z'_0 y}{\sum \frac{a}{\mathrm{ES}h^2} y' y}.$$

Le calcul nous paraît ici le moyen le plus simple de déterminer q. Pour chaque barre, on forme :

1° Le produit $\frac{ay}{\mathrm{ES}h^2} = \beta$; si toutes les barres sont homogènes, E disparaît de l'expression de q et l'on forme le produit $\frac{ay}{\mathrm{S}h^2} = \beta$;

2° Les deux produits $\beta z'_0$ et $\beta y'$.

On fait la somme algébrique (en ayant égard aux signes de z'_0 et y') des premiers, puis celle des seconds pour toutes les barres principales et l'on divise l'une de ces sommes par l'autre.

§ 639.

INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE. — Il faut, dans ce cas, employer les équations (7)

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum \left(\frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{ES}h^2} + \frac{\delta\tau a}{h}\right) x = 0, \\ &\sum \left(\frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{ES}h^2} + \frac{\delta\tau a}{h}\right) y = 0, \end{aligned}\right.$$

applicables quelles que soient les forces (verticales ou non) agissantes et quelles que soient les températures des barres.

Supposons qu'il n'y ait pas de forces.

Le moment de flexion M est alors seulement la somme des moments des réactions de l'appui gauche. C'est donc une fonction linéaire des coordonnées x et y du point que l'on considère, ou une fonction linéaire de celles x et y', les y' comptées depuis la ligne de fermeture AB_0 précédemment déterminée. Et comme il s'annule en A, il ne renferme pas de terme indépendant de x et de y'. Soit donc

$$M = Bx - qy',$$

B et q étant deux constantes.

En portant cette expression dans les équations (16), elles deviennent

$$(17) \qquad \left\{ \begin{aligned} &B\sum \frac{a}{ESh^2}x^2 - q\sum \frac{a}{ESh^2}y'x + \sum \frac{\delta\tau a}{h}x = 0, \\ &B\sum \frac{a}{ESh^2}xy - q\sum \frac{a}{ESh^2}y'y + \sum \frac{\delta\tau a}{h}y = 0, \end{aligned} \right.$$

Or, à cause de la seconde des équations (14), le terme en q disparaît de la première de ces équations. On en tire donc

$$(18) \qquad B = -\frac{\sum \frac{\delta\tau a}{h}x}{\sum \frac{a}{ESh^2}x^2},$$

qui se réduisent, si toutes les barres sont homogènes et à la même température, à

$$(18') \qquad B = -\delta\tau E\frac{\sum \frac{ax}{h}}{\sum \frac{a}{Sh^2}x^2}.$$

Si a et h sont sensiblement les mêmes pour toutes les barres,

$$(18'') \qquad B = -\delta\tau h E\frac{\Sigma x}{\sum \frac{x^2}{S}}.$$

Ayant B qu'il nous paraît convenable de calculer, la seconde des équations (17) fournit q. Le dénominateur de l'expression de q, à savoir $\sum \frac{a}{ESh^2}y'y$, est déjà connu par les recherches relatives à l'action des forces.

§ 640.

RÉACTIONS DES APPUIS ET TENSIONS DES BARRES. — Ayant le moment de flexion M en tous les points, on l'a en particulier au point d'encastrement. Ce moment, changé de signe, donne le couple des réactions de l'appui encastré.

On appliquera donc aux deux nœuds D et B deux forces de direction connue arbitraire, égales et opposées, formant un couple ayant ce moment. Ce sera le couple des réactions.

En outre, il y a deux réactions verticales R_0 et R_1 à appliquer en A et B.

Ces réactions devant faire équilibre à toutes les forces agissantes, c'est-à-dire aux charges données et aux deux forces du couple qu'on vient de déterminer, sont elles-mêmes déterminées.

1° On déterminera les deux réactions verticales R'_0 et R'_1 qui équilibrent les charges données. On les aura, en menant du pôle du polygone funiculaire $\alpha_0 1_0 \ldots \beta_0$ un rayon parallèle à sa corde $\alpha_0 \beta_0$. Le point de rencontre de ce rayon avec la verticale représentant le polygone détermine ces deux forces.

2° On appliquera en A et B deux forces verticales R''_0, R''_1 égales et de sens opposés, formant un couple équivalent au moment de flexion M au point B. En ajoutant les deux nouvelles forces à celles R'_0 et R'_1, on aura les réactions cherchées

$$R_0 = R'_0 + R''_0,$$
$$R_1 = R'_1 + R''_1 = R'_1 - R''_0.$$

Tensions des barres. — Ayant la réaction R_0 en A et la poussée q de l'arc dirigée suivant AB, on peut, en partant du point A, déterminer les tensions des barres soit par la méthode des figures réciproques, soit par celles de Ritter.

C. — ARCS ENCASTRÉS AUX DEUX EXTRÉMITÉS.

§ 641.

Théorème fondamental. — 1° *Si, aux divers nœuds d'un arc réticulaire encastré à ses extrémités, on applique des forces fictives parallèles*

$$(a) \qquad \frac{Ma}{ESh^2},$$

dirigées dans un sens convenu ou en sens contraire, suivant que M *est positif ou négatif, ces forces doivent être en équilibre astatique, c'est-à-dire qu'elles doivent être en équilibre quelque direction qu'on leur donne.*

2° *Si l'on a égard à l'influence de la température supposée variable d'une manière quelconque d'une barre à l'autre, il suffit d'appliquer le théorème à des forces fictives*

$$(b) \qquad \frac{Ma}{ESh^2} + \frac{\delta\tau a}{h},$$

où, dans le second terme, h est positif ou négatif selon les conventions du § 205.

3° *Si l'on veut avoir égard à l'élasticité des barres de remplissage, ces théorèmes subsistent, pourvu que les forces fictives* (*a*) *ou* (*b*) *soient appliquées non seulement aux nœuds, mais aussi aux sommets opposés aux barres de remplissage.*

Soient (*fig.* 2, *Pl. XLIV*) A et B deux appuis d'un arc réticulaire et supposons-le encastré à la fois en A et B, c'est-à-dire que non seulement les points A et B sont fixes, mais les *directions* (non les longueurs) des barres AC et BD sont invariables.

En prenant toujours la ligne AB pour axe des x et la perpendiculaire à AB menée en A pour axe des y, on a, pour le point A et la barre AC,

$$u_0 = v_0 = \omega_0 = 0.$$

Par suite, les composantes u, v du déplacement de B et la rota-

tion Ω de la barre BD fournies par les formules du § 622 sont, en observant que, pour le point B', on a $y = 0$, $x = AB = l$,

$$
\begin{aligned}
u &= \sum\left(\frac{M'a'}{E'S'h'^2} + \frac{\delta'\tau'a'}{h'}\right)y',\\
v &= -\sum\left(\frac{M'a'}{E'S'h'^2} + \frac{\delta'\tau'a'}{h'}\right)x',\\
\Omega &= \sum\left(\frac{M'a'}{E'S'h'^2} + \frac{\delta'\tau'a'}{h'}\right).
\end{aligned}
$$

où les sommes Σ s'étendent à toutes les barres, x', y' désignant les coordonnées des sommets opposés à ces barres. Or, comme on a $u = v = \Omega = 0$, il s'ensuit, en supprimant les accents,

$$
(19)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\sum\left(\frac{Ma}{ESh^2} + \frac{\delta\tau a}{h}\right) = 0,\\
&\sum\left(\frac{Ma}{ESh^2} + \frac{\delta\tau a}{h}\right)x = 0,\\
&\sum\left(\frac{Ma}{ESh^2} + \frac{\delta\tau a}{h}\right)y = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

qui établit les propositions énoncées.

Si l'on fait abstraction des effets de la température,

$$
(19')\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\sum\frac{Ma}{ESh^2} = 0,\\
&\sum\frac{Ma}{ESh^2}x = 0,\\
&\sum\frac{Ma}{ESh^2}y = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Si les barres sont homogènes, E disparaît des équations et

$$
(19'')\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\sum\frac{Ma}{Sh^2} = 0,\\
&\sum\frac{Ma}{Sh^2}x = 0,\\
&\sum\frac{Ma}{Sh^2}y = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Si la section est regardée comme constante, ce qui aura lieu

dans les recherches de première approximation,

$$(19''') \qquad \begin{cases} \sum \frac{Ma}{h^2} = 0, \\ \sum \frac{Ma}{h^2} x = 0, \\ \sum \frac{Ma}{h^2} y = 0. \end{cases}$$

Enfin si, dans ces premières recherches, on suppose la hauteur h constante et les longueurs des barres principales égales,

$$(19^{IV}) \qquad \begin{cases} \Sigma M = 0, \\ \Sigma M x = 0, \\ \Sigma M y = 0. \end{cases}$$

Ce sont des forces M appliquées aux divers nœuds qui sont en équilibre astatique.

§ 642.

APPLICATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL. — Ce théorème s'applique exactement comme dans le cas de l'arc encastré à un bout seulement.

Supposons d'abord qu'il s'agisse seulement d'appliquer les équations (19^{IV}).

Reportons-nous à la *fig.* 2, *Pl. XLIV.*

1° On construira le polygone funiculaire $\alpha_0 \beta_0$ des charges données de distance polaire quelconque q_0. Soient z_0 les ordonnées comptées depuis la corde, qu'y déterminent les verticales des nœuds.

2° On déterminera la ligne de fermeture de ce polygone dans l'hypothèse où l'arc serait une poutre droite encastrée à ses extrémités, c'est-à-dire qu'on déterminera une droite $a_0 b_0$ par la condition que les forces descendantes z_0 soient équilibrées par des forces ascendantes représentées par les ordonnées que déterminent les verticales des nœuds entre $\alpha_0 \beta_0$ et $a_0 b_0$. On procédera pour cela comme au Chapitre IV, IIe Partie.

Soient z'_0 les ordonnées positives ou négatives du polygone

funiculaire comptées depuis sa ligne de fermeture $a_0 b_0$. On aura identiquement

$$(20)\qquad \begin{cases} \Sigma z'_0 \quad = 0, \\ \Sigma z'_0 x = 0, \end{cases}$$

les sommes s'étendant à tous les nœuds.

3° On déterminera de même une ligne $A'_0 B'_0$, telle que des forces descendantes égales aux ordonnées y des sommets du polygone A.1.9.2.10.3...8.16.D.B comptées depuis la corde AB soient équilibrées par des forces ascendantes égales aux ordonnées que déterminent les nœuds ou sommets de ce polygone entre AB et $A'_0 B'_0$.

Soient y' les ordonnées positives ou négatives des nœuds ou sommets du polygone comptées depuis $A'_0 B'_0$. On aura

$$(20')\qquad \begin{cases} \Sigma y' \quad = 0, \\ \Sigma y' x = 0. \end{cases}$$

Observons que, si l'arc est symétrique, la ligne $A'_0 B'_0$ est horizontale. Alors la seconde des équations (20′) est satisfaite d'elle-même si la première l'est. Et il est aisé de satisfaire à la première. Il suffit de prendre l'ordonnée de $A'_0 B'_0$ égale à la moyenne arithmétique des ordonnées des nœuds.

4° Le moment de flexion cherché M sera

$$(21)\qquad M = q_0 z'_0 - q y',$$

où entre une seule constante indéterminée, la poussée q de l'arc.

Quel que soit q, en vertu de (20) et (20′), on satisfait aux deux premières des équations (19^{IV}). La dernière donne alors pour déterminer q

$$q_0 \Sigma z'_0 y - q \Sigma y' y = 0,$$

$$(22)\qquad q = q_0 \frac{\Sigma z'_0 y}{\Sigma y' y},$$

que l'on construira comme plus haut.

5° S'il fallait appliquer les équations (19′), on emploierait la méthode d'amplification des ordonnées et l'on trouverait toujours

les lignes de fermeture. On aurait alors

(23)
$$\left\{\begin{aligned} &\sum \frac{a}{\mathrm{ES}h^2} z'_0 = 0,\\ &\sum \frac{a}{\mathrm{ES}h^2} z'_0 x = 0, \end{aligned}\right.$$

(23')
$$\left\{\begin{aligned} &\sum \frac{a}{\mathrm{ES}h^2} y' = 0,\\ &\sum \frac{a}{\mathrm{ES}h^2} y' x = 0, \end{aligned}\right.$$

et

(24)
$$q = \frac{\sum \frac{a}{\mathrm{ES}h^2} z'_0 y}{\sum \frac{a}{\mathrm{ES}h^2} y' y},$$

que l'on calculerait comme il a été dit précédemment.

§ 643.

INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE. — Appliquons les formules (19) en supposant qu'il n'agisse aucune force sur l'arc. Le moment de flexion en un point sera alors une fonction linéaire des coordonnées x et y de ce point ou de celles x et y', soit

$$\mathrm{M} = \mathrm{A} + \mathrm{B}x - q y',$$

A, B, q étant trois constantes à déterminer. Celle A est le moment de flexion à l'encastrement de gauche, B est la réaction verticale en ce point et q la poussée de l'arc

En portant cette expression dans (19), il vient, à cause de (23'),

(25)
$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}\sum \frac{a}{\mathrm{ES}h} + \mathrm{B}\sum \frac{ax}{\mathrm{ES}h} + \sum \frac{\delta\tau a}{h} = 0,\\ &\mathrm{A}\sum \frac{ax}{\mathrm{ES}h} + \mathrm{B}\sum \frac{ax^2}{\mathrm{ES}h} + \sum \frac{\delta\tau a}{h} x = 0,\\ &\mathrm{A}\sum \frac{ay}{\mathrm{ES}h} + \mathrm{B}\sum \frac{axy}{\mathrm{ES}h} - q\sum \frac{ay'y}{\mathrm{ES}h} + \sum \frac{\delta\tau a}{h} y = 0. \end{aligned}\right.$$

Les deux premières fournissent A et B et alors la dernière donne q.

On calculera les termes des sommes Σ.

Supposons l'arc de structure symétrique. Les équations d'équilibre de forces fictives étant indépendantes du choix des axes, prenons la verticale de symétrie de l'arc pour axe des y. Toutes les équations subsisteront telles quelles. Mais alors $y = y'$. Donc, en vertu de (23'), et comme par symétrie $\sum \frac{ax}{\mathrm{ES}h} = 0$, les équations ci-dessus donnent

$$(26)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A} &= -\frac{\sum \frac{\delta\tau a}{h}}{\sum \frac{a}{\mathrm{ES}h}}, \\ \mathrm{B} &= -\frac{\sum \frac{\delta\tau a x}{h}}{\sum \frac{a x^2}{\mathrm{ES}h}}. \end{aligned}\right.$$

Soit y_0 l'ordonnée de $\mathrm{A}'_0\mathrm{B}'_0$. On a

$$y = y_0 + y'.$$

Donc

$$\sum \frac{ay}{\mathrm{ES}h} = y_0 \sum \frac{a}{\mathrm{ES}h},$$

$$\mathrm{A}\sum \frac{ay}{\mathrm{ES}h} = -y_0 \sum \frac{\delta\tau a}{h};$$

par suite

$$(26')\qquad q = \frac{\sum \frac{\delta\tau a}{h}(y - y_0)}{\sum \frac{a y' y}{\mathrm{ES}h}} = \frac{\sum \frac{\delta\tau a}{h} y'}{\sum \frac{a y' y}{\mathrm{ES}h}}.$$

Si l'arc est homogène, E sort du signe Σ et le dénominateur est connu par les recherches relatives aux forces.

Supposons l'arc homogène et toutes les barres à la même température τ.

Alors

$$(26'')\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A} &= -\delta\tau \mathrm{E}\frac{\sum \frac{a}{h}}{\sum \frac{a}{\mathrm{S}h}}, \\ \mathrm{B} &= 0, \\ q &= \delta\tau \mathrm{E}\frac{\sum \frac{a y'}{h}}{\sum \frac{a y' y}{\mathrm{S}h}}, \end{aligned}\right.$$

§ 644.

RÉACTIONS DES APPUIS ET TENSIONS DES BARRES. — La réaction de chaque appui se compose d'une force et d'un couple.

Soient R_0, M'_0 la force et le couple pour l'appui A; R_1, M'_1 la force et le couple pour l'appui B.

On connaît le moment de flexion M en chaque point. Il est la somme de celui dû aux forces et de celui dû à la température. Donc en particulier on le connaît en A et B. Soient M_0 et M_1 ses valeurs en ces points.

On aura

$$M'_0 = \quad M_0,$$
$$M'_1 = -M_1.$$

On appliquera en A et C deux forces parallèles de direction arbitraire formant un couple de moment M_0 et en B et D deux forces formant un couple de moment $-M_1$.

Les réactions verticales R_0 et R_1 doivent équilibrer les charges données et les quatre forces qu'on vient d'ajouter.

Soient R'_0, R'_1 celles qui équilibrent les forces données (§ 54).

Appliquons en outre en A et B deux forces verticales R''_0, R''_1 égales et de sens opposés formant un couple équivalent à $-M'_0$ ou à $-M_0$ et enfin deux forces verticales R'''_0, R'''_1 égales et de sens opposés formant un couple équivalent à $-M'_1$ ou à M_1. On aura

$$R_0 = R'_0 + R''_0 + R'''_0,$$
$$R_1 = R'_1 + R''_1 + R'''_1.$$

Ayant les réactions des appuis, les tensions des barres s'ensuivent comme précédemment.

D. — ARCS AVEC CHARNIÈRES.

Il est clair que les mêmes méthodes peuvent s'étendre à toute espèce d'arcs. Ce qui précède et les indications du Chapitre IV, IIIe Partie, montrent suffisamment comment on devra procéder pour des arcs réticulaires à charnières.

§ 645.

MÉTHODE BASÉE SUR LA LIGNE DE POUSSÉE. — Nous avons vu comment, dans un arc à section pleine, on peut trouver très simplement la ligne obtenue en portant sur la verticale d'une charge mobile égale à l'unité, agissant sur un arc quelconque encastré ou non, une ordonnée égale ou proportionnelle à la poussée qu'elle y détermine.

Cette ligne tracée, le principe de superposition fournit de suite la poussée qu'une charge quelconque produit dans l'arc.

La poussée connue, en l'introduisant parmi les forces données, un arc peut être traité comme une simple poutre droite soumise aux mêmes sujétions que lui.

Il y a donc là une méthode complète et, croyons-nous, nouvelle de résoudre graphiquement les problèmes des arcs à sections pleines.

Pour l'appliquer ici, il suffit d'observer que les formules des arcs réticulaires se déduisent de celles relatives aux arcs à sections pleines, en remplaçant dans ces dernières

$$\int \frac{M\,ds}{EI}, \quad \int \frac{M\,ds}{EI}x, \quad \int \frac{M\,ds}{EI}y$$

respectivement par

$$\sum \frac{Ma}{ESh^2}, \quad \sum \frac{Ma}{ESh^2}x, \quad \sum \frac{Ma}{ESh^2}y.$$

Moyennant cette modification, les théorèmes sur le tracé des lignes de poussée s'appliquent aux arcs réticulaires. Pour ceux-ci, ces lignes sont rigoureusement de simples polygones ayant leurs sommets sur les verticales des nœuds. Ainsi :

THÉORÈME. — *Pour avoir la ligne de poussée d'un arc quelconque, encastré ou non :*

1° *A tous les nœuds de l'arc appliquez des forces verticales fictives qui, à une échelle convenue, représentent les grandeurs*

$$\frac{ay}{ESh^2};$$

2° *Construisez le polygone funiculaire de ces forces dont la distance polaire représente, à l'échelle ci-dessus et celle des longueurs adoptée dans le dessin de l'arc, la grandeur déterminée une fois pour toutes, comme il a été dit précédemment,*

$$\sum \frac{ay^2}{ESh^2} = \sum \frac{ay}{ESh} y,$$

ce polygone étant assujetti à passer par les deux appuis, de sorte qu'il est déterminé.

L'ordonnée de l'un quelconque de ses sommets, comptée depuis sa corde et mesurée à l'échelle des longueurs du dessin de l'arc, représente la grandeur numérique de la poussée qu'un poids 1 appliqué au nœud placé sur la verticale de ce sommet détermine dans l'arc.

CHAPITRE IX.

APPLICATION AUX POUTRES ET ARCS RÉTICULAIRES CONTINUS.

§ 646.

FORMULE FONDAMENTALE. — Soit (*fig.* 3, *Pl. XLIV*) une poutre réticulaire, de hauteur constante ou variable, posée sur $n+1$ appuis de niveau ou non, pourvu que les différences de niveau soient de l'ordre des déplacements élastiques, ou un arc posé sur de tels appuis, ces appuis épousant ou non la forme de l'intrados dans son état naturel, pourvu que, dans ce dernier cas, les écarts entre cette courbe et les appuis soient de l'ordre des déplacements élastiques.

Cela équivaut à dire que nous considérerons soit un arc, soit une poutre droite réticulaire dont $n+1$ points sont assujettis à rester fixes ou à avoir dans le sens vertical des déplacements donnés.

Nous appellerons ces points des appuis, et nous les désignerons, en allant de gauche à droite, par les lettres

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{i-1},\ A_i,\ A_{i+1},\ \ldots,\ A_{n-1},\ A_n.$$

Nous désignerons les projections horizontales des longueurs des travées aussi en allant de gauche à droite, par les lettres

$$l_1,\ l_2,\ l_3,\ \ldots,\ l_i,\ l_{i+1},\ \ldots,\ l_n.$$

Nous appellerons A'_i la projection horizontale de A_i, de sorte que $A'_{i-1}A'_i = l_i$.

Considérons les deux travées consécutives l_i, l_{i+1}.

Les nœuds A_{i-1}, A_i, A_{i+1} sont ceux qui reposeraient naturellement sur les appuis si ceux-ci épousaient exactement la forme de l'intrados; dans le cas contraire, ils n'y reposeront qu'après la déformation de la pièce.

Nous rapporterons les points de chaque travée à une horizon-

tale dirigée de la gauche vers la droite, prise pour axe des x et à la verticale ascendante prise pour axe des y.

Nous désignerons par u, v les composantes du déplacement d'un nœud dont les coordonnées sont x, y; u', v' celles du nœud dont les coordonnées sont x', y'; u_i, v_i celles du nœud posé sur l'appui A_i.

On se donne les déplacements verticaux v_i; ils sont nuls si les appuis A_i se trouvent sur l'intrados figuré dans son état naturel. Sur la figure, ces appuis sont supposés en contrebas de l'intrados, c'est-à-dire que les v_i sont supposés négatifs.

Nous appellerons A_iB_i, A_iC_i les deux étrésillons partant de ce nœud, A_iB_i étant celui de gauche.

Nous appellerons ω_i la rotation de l'étrésillon de droite A_iC_i et nous désignerons par $\sum_i$ une somme s'étendant à toutes les barres comprises entre $A_{i-1}C_{i-1}$ et A_iC_i, la première exclue, la seconde incluse.

Ceci posé, les formules (E') du § 622 donnent, en remplaçant ω_0 par ω_{i-1} et Ω par ω_i,

$$v_i = v_{i-1} - \omega_{i-1} l_i + \sum_i \left(\frac{M'a'}{E'S'h'^2} + \frac{\delta'\tau'a'}{h'}\right)(l_i - x)$$

ou

$$v_i = v_{i-1} - l_i \left[\omega_{i-1} - \sum_i \left(\frac{M'a'}{E'S'h'^2} + \frac{\delta'\tau'a'}{h'}\right)\right] - \sum_i \left(\frac{M'a'}{E'S'h'^2} + \frac{\delta'\tau'a'}{h'}\right)x,$$

et de même

$$v_{i+1} = v_i - \omega_i l_i + \sum_{i+1} \left(\frac{M'a'}{E'S'h'^2} + \frac{\delta'\tau'a'}{h'}\right)(l_{i+1} - x),$$

et, pour les rotations, la première (D') donne

$$\omega_i = \omega_{i-1} - \sum_i \left(\frac{M'a'}{E'S'h'^2} + \frac{\delta'\tau'a'}{h'}\right).$$

A cause de la dernière, la seconde devient

$$v_i = v_{i-1} - \omega_i l_i - \sum_i \left(\frac{M'a'}{E'S'h'^2} + \frac{\delta'\tau'a'}{h'}\right)x.$$

Éliminant ω_i entre cette dernière et celle qui donne v_{i+1}, il vient, en supprimant les accents,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{l_i}\sum_i\left(\frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{ES}h^2}+\frac{\delta\tau a}{h}\right)x+\frac{1}{l_{i+1}}\sum_{i+1}\left(\frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{ES}h^2}+\frac{\delta\tau a}{h}\right)(l_{i+1}-x)\\ &\qquad=\frac{v_{i-1}-v_i}{l_i}+\frac{v_{i+1}-v_i}{l_{i+1}}.\end{aligned}\right.$$

Dans le cas où l'on fait abstraction de la température, il vient

$$(1')\quad \frac{1}{l_i}\sum_i\frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{ES}h^2}x+\frac{1}{l_{i+1}}\sum\frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{ES}h^2}(l_{i+1}-x)=\frac{v_{i+1}-v_i}{l_i}+\frac{v_{i+1}-v_i}{l_{i+1}}.$$

Cette formule s'applique sans modification aucune, qu'il s'agisse d'un arc ou d'une poutre droite. Dans ce dernier cas, on rapporte généralement les altitudes des appuis à une ligne de comparaison supérieure, de sorte que, si y_i est la cote de l'appui correspondant au nœud A_i, on aura

$$v_{i-1}-v_i=y_i-y_{i-1},$$
$$v_{i+1}-v_i=y_i-y_{i+1},$$

d'où

$$(2)\quad \frac{1}{l_i}\sum_i\frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{ES}h^2}x+\frac{1}{l_{i+1}}\sum_{i+1}\frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{ES}h^2}(l_{i+1}-x)=\frac{y_i-y_{i-1}}{l_i}+\frac{y_i-y_{i+1}}{l_{i+1}}.$$

Si l'on fait abstraction de l'élasticité des barres de remplissage, les sommes ne se rapportent qu'aux barres principales et M représente le moment de flexion au nœud opposé à la barre a. Les formules sont alors analogues à celles des poutres pleines.

Si tous les appuis sont de niveau ou si, dans le cas d'un arc, tous sont exactement sur l'intrados, les équations (1) et (2) deviennent respectivement

$$(3)\quad \frac{1}{l_i}\sum_i\left(\frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{ES}h}+\frac{\delta\tau a}{h}\right)x+\frac{1}{l_{i+1}}\sum_{i+1}\left(\frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{ES}h^2}+\frac{\delta\tau a}{h}\right)(l_{i+1}-x)=0,$$

$$(3')\quad \frac{1}{l_i}\sum_{i+1}\frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{ES}h^2}x+\frac{1}{l_{i+1}}\sum\frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{ES}h^2}(l_{i+1}-x)=0.$$

Si toutes les barres sont homogènes, E disparaît, et si, dans une

première recherche, on suppose, à toutes les barres, même section, il en est de même de S. Si la hauteur de la pièce est sensiblement constante et si les barres principales ont sensiblement même longueur, les formules deviennent :

1° Dans le cas de l'arc appuyé sur des points qui ont des dénivellations relativement à la forme naturelle de l'intrados,

$$(1') \quad \frac{1}{l_i}\sum_{i} \mathrm{M}x + \frac{1}{l_{i+1}}\sum_{i+1} \mathrm{M}(l_{i+1}-x) = \frac{\mathrm{ES}h^2}{a}\left(\frac{v_{i-1}-v_i}{l_i} + \frac{v_{i+1}-v_i}{l_{i+1}}\right);$$

2° Dans le cas de la poutre posée sur des appuis ayant des dénivellations y_i relativement à une ligne de comparaison supérieure (axe des y de haut en bas),

$$(2') \quad \frac{1}{l_i}\sum_{i} \mathrm{M}x + \frac{1}{l_{i+1}}\sum_{i+1} \mathrm{M}(l_{i+1}-x) = \frac{\mathrm{ES}h^2}{a}\left(\frac{y_i-y_{i-1}}{l_i} + \frac{y_i-y_{i+1}}{l_{i+1}}\right);$$

3° Dans le cas de l'arc ou de la poutre sans dénivellation relativement à la fibre moyenne naturelle,

$$(3') \quad \frac{1}{l_i}\sum_{i} \mathrm{M}x + \frac{1}{l_{i+1}}\sum_{i+1} \mathrm{M}(l_{i+1}-x) = 0.$$

§ 647.

APPLICATION DE LA FORMULE FONDAMENTALE AUX POUTRES DROITES. — Ces diverses formules sont identiques à celles des poutres pleines, avec cette différence que les intégrations dans l'étendue d'une travée sont remplacées par des sommations à un nombre limité de termes.

Quoiqu'il suffise de connaître le moment de flexion aux divers nœuds, on peut l'étudier en tous les points, c'est-à-dire comme une fonction continue de x, ce qui le fournit en particulier aux nœuds. On peut, par suite, tirer de ces équations le théorème des trois moments, celui des deux moments, chercher les foyers, etc.

Il suffit pour cela d'employer les formules générales données

pour les poutres droites en remplaçant partout

$$\frac{\mathrm{M}\,dx}{\mathrm{EI}}$$

par

$$\frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{ES}h^2},$$

et le signe $\int_0^{l_i}$ par le signe $\sum\limits_i$.

Dans le cas où l'on regarde le rapport $\frac{a}{\mathrm{ES}h^2}$ comme constant, on le fera sortir des signes Σ.

Ainsi, l'équation (11) du § 353, qui donne la relation fondamentale pour des poutres de section constante ou variable, entre les moments de flexion $\mathfrak{M}_i$ et $\mathfrak{M}_{i+1}$ en deux points F_i et F_{i+1} choisis arbitrairement dans deux travées consécutives l_i et l_{i+1}, et le moment de flexion M_i sur l'appui qui les sépare, est

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\mathfrak{M}_i-\mu_i}{v_i l_i}\int_0^{l_i}\frac{x(l_i-x)}{\mathrm{EI}}dx\\ &+\mathrm{M}_i\left[\frac{1}{v_i l_i}\int_0^{l_i}\frac{(x-u_i)x\,dx}{\mathrm{EI}}+\frac{1}{u_{i+1}l_{i+1}}\int_0^{l_{i+1}}\frac{(u_{i+1}-x)(l_{i+1}-x)}{\mathrm{EI}}dx\right]\\ &+\frac{\mathfrak{M}_{i+1}-\mu_{i+1}}{u_{i+1}l_{i+1}}\int_0^{l_{i+1}}\frac{x(l_{i+1}-x)}{\mathrm{EI}}dx=\mathrm{H}_i,\end{aligned}\right.$$

où u_i, $v_i=l_i-u_i$ sont les distances du point F_i aux deux appuis A_{i-1}, A_i de la travée l_i et u_{i+1}, $v_{i+1}=l_{i+1}-x$ les distances de F_{i+1}, aux appuis A_i, A_{i+1}.

Il est bon d'observer que la lettre v_i n'a plus ici la même signification que dans les formules ci-dessus. Il n'en résultera aucune confusion, parce que, dans la suite, v_i ne sera plus employé qu'avec sa nouvelle acception.

Dans la formule ci-dessus, on a

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{H}_i=&-\frac{1}{l_i}\int_0^{l_i}\mu\frac{x}{\mathrm{EI}}dx\\ &-\frac{1}{l_{i+1}}\int_0^{l_{i+1}}\mu\frac{l_{i+1}-x}{\mathrm{EI}}dx-\frac{y_{i-1}-y_i}{l_i}-\frac{y_{i+1}-y_i}{l_{i+1}}.\end{aligned}\right.$$

Cette équation se trouvera ici remplacée par celle-ci

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\mathfrak{M}_i - \mu_i}{v_i l_i}\sum_i \frac{x(l_i - x)a}{ES h^2} \\ &+ M_i\left[\frac{1}{v_i l_i}\sum_i \frac{(x-u_i)xa}{ES h^2} + \frac{1}{u_{i+1} l_{i+1}}\sum_{i+1}\frac{(u_{i+1}-x)(l_{i+1}-x)a}{ES h^2}\right] \\ &+ \frac{\mathfrak{M}_{i+1} - \mu_{i+1}}{u_{i+1} l_{i+1}}\sum_{i+1}\frac{x(l_{i+1}-x)a}{ES h^2} = H_i, \end{aligned}\right.$$

avec

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} H_i = &-\frac{1}{l_i}\sum_i \mu \frac{xa}{ES h^2} \\ &-\frac{1}{l_{i+1}}\sum_{i+1}\mu\frac{(l_{i+1}-x)a}{ES h^2} - \frac{y_{i-1}-y_i}{l_i} - \frac{y_{i+1}-y_i}{l_{i+1}}, \end{aligned}\right.$$

où $\sum_i$ se rapporte à toutes les barres principales de la travée l_i; dans chaque terme, x est l'abscisse du nœud opposé à cette barre par rapport à la verticale de l'appui gauche de la travée.

μ et μ_i ont les mêmes significations que dans les poutres pleines.

§ 648.

THÉORÈME DES TROIS MOMENTS. — La formule (6) comprend toute la théorie des poutres réticulaires continues, de section et de hauteur constantes ou variables. Pour en déduire le théorème des trois moments pour de telles pièces, il suffit de supposer les points F_i et F_{i+1} coïncidant avec les appuis A_{i-1} et A_{i+1}, c'est-à-dire de faire

$$\begin{aligned} &u_i = 0, && v_i = l_i, && \mu_i = 0, \\ &u_{i+1} = l_{i+1}, && v_{i+1} = 0, && \mu_{i+1} = 0, \\ &\mathfrak{M}_i = M_{i-1}, && \mathfrak{M}_{i+1} = M_{i+1}, \end{aligned}$$

d'où, pour le théorème cherché,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{M_{i-1}}{l_i^2}\sum_i \frac{x(l_i-x)a}{ES h^2} + M_i\left[\frac{1}{l_i^2}\sum_i \frac{ax^2}{ES h^2} + \frac{1}{l_{i+1}^2}\sum_{i+1}\frac{(l_{i+1}-x)^2 a}{ES h^2}\right] \\ &\qquad + \frac{M_{i+1}}{l_{i+1}^2}\sum_{i+1}\frac{x(l_{i+1}-x)a}{ES h^2} \\ &= -\frac{1}{l_i}\sum_i \frac{\mu a x}{ES h^2} - \frac{1}{l_{i+1}}\sum_{+1}\mu\frac{l_{i+1}-x}{ES h^2} - \frac{y_{i-1}-y_i}{l_i} - \frac{y_{i+1}-y_i}{l_i}, \end{aligned}\right.$$

où, dans chaque terme des sommes Σ, μ est la valeur du moment de flexion au point d'abscisse x, c'est-à-dire au nœud opposé à la barre à laquelle se rapporte ce terme, qui se produirait si la travée considérée existait seule, posée sur appuis simples. Les valeurs de μ sont d'ailleurs celles du § 355.

Si $\frac{a}{ESh^2}$ est constant,

$$(9)\left\{\begin{aligned} &\frac{M_{i-1}}{l_i^2}\sum_i x(l_i - x) \\ &\quad + M_i\left[\frac{1}{l_i^2}\sum_i x^2 + \frac{1}{l_{i+1}^2}\sum_{i+1}(l_{i+1}-x)^2\right] + \frac{M_{i+1}}{l_{i+1}^2}\sum_{i+1} x(l_{i+1}-x) \\ &= -\frac{1}{l_i}\sum_i \mu x - \frac{1}{l_{i+1}}\sum_{i+1}\mu(l_{i+1}-x) \\ &\quad - \frac{ESh^2}{a}\left(\frac{y_{i-1}-y_i}{l_i} - \frac{y_{i+1}-y_i}{l_{i+1}}\right), \end{aligned}\right.$$

le dernier terme disparaissant si les appuis sont de niveau quand il s'agit d'une poutre, et s'ils épousent exactement la forme naturelle de l'arc s'il s'agit d'un arc.

A l'aide de l'équation (9), on peut résoudre tous les problèmes relatifs aux poutres réticulaires continues.

Mais il est plus commode, comme nous l'avons montré à l'occasion des poutres continues, d'employer ce que nous avons appelé le théorème des deux moments.

§ 649.

THÉORÈME DES DEUX MOMENTS. — Le point F_i d'une travée étant choisi arbitrairement, prenons celui F_{i+1} de façon à satisfaire à l'équation *indépendante des charges,* dépendant uniquement des dimensions de la pièce,

$$(10)\quad \frac{1}{v_i l_i}\sum_i \frac{(x-u_i)xa}{ESh^2} + \frac{1}{u_{i+1} l_{i+1}}\sum_{i+1}\frac{(u_{i+1}-x)(l_{i+1}-x)a}{ESh^2} = 0.$$

Alors l'équation (6) n'a plus lieu qu'entre les deux moments $\mathfrak{M}_i$ et $\mathfrak{M}_{i+1}$.

Donc, connaissant $\mathfrak{M}_i$, on en tire $\mathfrak{M}_{i+1}$. Si l'on y suppose $\frac{ESh^2}{a}$ constant, ce facteur sort des signes Σ et, s'il n'y a pas de dé-

nivellation des appuis relativement à la forme naturelle de la pièce, il disparaît.

Qu'il y ait ou non des dénivellations, il disparaît dans ce cas de l'équation (10), qui devient

$$(11)\qquad \frac{1}{v_i l_i}\sum_i (x-u_i)x + \frac{1}{u_{i+1} l_{i+1}}\sum_{i+1}(u_{i+1}-x)(l_{i+1}-x) = 0$$

§ 650.

FOYERS. — Prenons comme point de départ F_0 l'appui gauche A_0, c'est-à-dire faisons $u_0 = 0$, $v_0 = l_1$; l'équation ci-dessus donne un point F_1 dans la première travée; à celui-ci correspond un point F_2 dans la seconde et ainsi de suite. Ce sont les *foyers de gauche*.

De même, partant du point A_{n+1} et le prenant pour le point F_n, c'est-à-dire faisant $v_{n+1} = 0$, $u_{n+1} = l_n$, l'équation (10) donne un point F'_{n-1} dans la travée l_{n-1}, puis à celui-ci en correspond un dans la travée l_{n-2}, etc. Ce sont les *foyers de droite*.

§ 651.

MOMENTS DE FLEXION. — En partant du foyer de gauche pour lequel $\mathfrak{M}_0 = 0$, le théorème des deux moments donne $\mathfrak{M}_1$, puis de $\mathfrak{M}_1$ on déduit $\mathfrak{M}_2$, et ainsi de suite.

On a donc les moments en tous les foyers de gauche.

On peut les trouver de même aux foyers de droite.

Par suite, on les connaît en deux des points de chaque travée, ce qui permet d'en tracer la ligne représentative dans toute l'étendue de la poutre.

§ 652.

EFFORTS TRANCHANTS, RÉACTIONS DES APPUIS ET TENSIONS DES BARRES. — Connaissant les moments de flexion, on en déduit les efforts tranchants qui sont les dérivées changées de signe des moments de flexion ou les coefficients angulaires changés de signe des côtés des polygones funiculaires représentant les moments de flexion, ou des tangentes aux courbes funiculaires représentant ces moments.

La réaction d'un appui s'obtient comme pour les poutres

pleines. Enfin, connaissant ces réactions, on obtient les tensions des barres par la construction d'une figure réciproque, plus simplement ici par le théorème de Ritter (§ 205).

§ 653.

Cas des poutres de hauteur constante. — Lorsqu'on suppose la hauteur de la poutre, les longueurs et les sections des barres constantes, il est aisé d'effectuer les sommations qui entrent dans les équations ci-dessus et l'on peut donner ces équations sous forme finie. L'équation (11), si l'on y remplace u_i par $l_i - v_i$ devient

$$(12)\qquad \frac{\sum_i x(l_i - x)}{v_i l_i} + \frac{\sum_{i+1} x(l_{i+1} - x)}{u_{i+1} l_{i+1}} = \frac{1}{l_i}\sum_i x + \frac{1}{l_{i+1}}\sum_{i+1}(l_{i+1} - x).$$

C'est l'équation qui donne les foyers.

Le théorème des deux moments devient alors

$$(13)\qquad \frac{\sum_i x(l_i - x)}{v_i l_i}\,\mathfrak{M}_i + \frac{\sum_{i+1} x(l_{i+1} - x)}{u_{i+1} l_{i+1}}\,\mathfrak{M}_{i+1} = \mathrm{H}_i,$$

où

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{H}_i = &-\frac{1}{l_i}\sum_i \mu x \\ &- \frac{1}{l_{i+1}}\sum_{i+1}\mu(l_{i+1} - x) - \frac{\mathrm{ES}h^2}{a}\left(\frac{y_{i-1} - y_i}{l_i} + \frac{y_{i+1} - y_i}{l_{i+1}}\right)\end{aligned}\right.$$

Les sommes qui entrent dans H_i dépendant des charges, on ne peut pas les calculer une fois pour toutes; mais celles qui entrent dans l'équation des foyers et dans les coefficients de $\mathfrak{M}_i$ et $\mathfrak{M}_{i+1}$ du théorème des deux moments (et qui sont les mêmes) peuvent se calculer pour chaque forme de poutre.

On voit que ce qu'on a à déterminer, ce sont des sommes de la forme

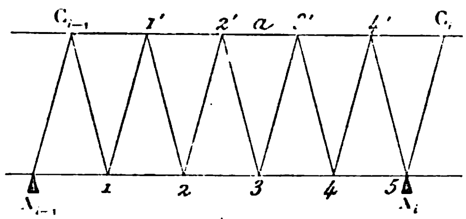
$$\sum_i \alpha,\quad \sum_i \alpha x = \alpha \sum_i x,\quad \sum_i \alpha x^2 = \alpha \sum_i x^2,$$

où α est une constante.

Examinons le cas d'une poutre à triangles isoscèles.

Soit $2k$ le nombre des barres principales (k barres inférieures et k barres supérieures), entrant dans une travée $A_{i-1}A_i$ (*fig.* 31).

Fig. 31.



Comme nous l'avons dit (§ 646) la somme $\sum_i$ se rapporte à toutes les barres comprises entre $A_{i-1}C_{i-1}$ et A_iC_i, la première exclue. Mais, comme nous négligeons ce qui concerne les barres de remplissage, nous avons seulement à considérer les k barres principales (sur la figure $k=5$) comprises entre A_{i-1} et A_i et celles pareilles comprises entre C_{i-1} et C_i.

Pour une barre $a = 2'.3'$, l'abscisse x se rapporte au nœud 3 opposé à cette barre.

La somme $\sum_i \alpha$ signifie qu'on doit répéter la grandeur constante α autant de fois qu'il y a de barres, de sorte que

$$\sum_i \alpha = 2k\alpha. \tag{15}$$

Pour former $\sum_i x$, nous considérons séparément les termes de la somme se rapportant aux barres supérieures et ceux se rapportant aux barres inférieures. Pour les barres inférieures, les abscisses x sont celles des sommets 1, 2, 3, 4, 5. Toutes les barres ayant même longueur a, les abscisses de ces points comptées de A_{i-1} sont

$$a,\quad 2a,\quad 3a,\quad 4a,\quad 5a.$$

En général,

$$a(1+2+3+\ldots+k) = \frac{k(k+1)a}{2}.$$

Pour les barres supérieures, ce sont les nœuds C_{i-1}, $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ dont les abscisses sont à sommer, et l'on aura

$$\frac{a}{2}+\left(\frac{a}{2}+a\right)+\left(\frac{a}{2}+2a\right)+\ldots+\left[\frac{a}{2}+(k-1)a\right]$$
$$=\frac{ka}{2}+a[1+2+\ldots+(k-1)]=\frac{ka}{2}+\frac{(k-1)ka}{2}=\frac{k^2a}{2}.$$

Donc, en tout, on a

$$\sum_i x=\frac{k(k+1)a}{2}+\frac{k^2a}{2}=\frac{k(2k+1)a}{2}. \tag{16}$$

On formera de même $\sum_i(l_i-x)$, c'est-à-dire la somme des distances des nœuds à l'appui A_i. Pour les barres supérieures, c'est la somme concernant les nœuds 1, 2, 3, 4, 5, soit

$$0+a+2a+3a+\ldots+(k-1)a=\frac{(k-1)ka}{2}.$$

Pour les barres inférieures, ce sont les nœuds $4'$, $3'$, $2'$, $1'$, C_{i-1}, qui donnent

$$\frac{a}{2}+\left(\frac{a}{2}+a\right)+\left(\frac{a}{2}+2a\right)+\left(\frac{a}{2}+3a\right)+\ldots+\left[\frac{a}{2}+(k-1)a\right],$$

soit

$$\frac{ka}{2}+\frac{(k-1)ka}{2}=\frac{k^2a}{2},$$

soit en tout

$$\sum_i(l_i-x)=\frac{k(2k-1)a}{2}. \tag{17}$$

La somme $\sum_i x^2$ donne pour les barres supérieures

$$a^2(1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2)=\frac{a^2k(k+1)(2k+1)}{6},$$

pour les barres inférieures

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}+a\right)^2+\left(\frac{a}{2}+2a\right)^2+\ldots+\left[\frac{a}{2}+(k-1)a\right]^2$$
$$=\frac{ka^2}{4}+a^2\frac{(k-1)k}{2}+a^2\frac{(k-1)k(2k-1)}{6},$$

soit en tout

$$ka^2\left[\frac{1}{4}+\frac{k-1}{2}+\frac{(k-1)(2k-1)+(k+1)(2k+1)}{6}\right],$$

ou

(18) $$\sum_i x^2 = ka^2\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{4}+\frac{2k^2+1}{3}\right)=\frac{ka^2(8k^2+6k+1)}{12}.$$

La somme $\sum_i x(l_i - x)$ est par suite

$$\sum_i x(l_i-x)=l_i\sum_i x-\sum_i x^2=\frac{k(2k+1)a}{2}l_i-\frac{ka^2(8k^2+6k+1)}{12},$$

ou, en observant que

$$l_i = ka_i,$$

(19) $$\sum_i x(l_i-x)=\frac{ka^2(4k^2-1)}{12}.$$

Portons ces valeurs dans l'équation qui donne les foyers et celle qui exprime le théorème des deux moments, en les multipliant par $a=\frac{l_i}{k}$, introduisant l_i au lieu de a et mettant la lettre $2k_i$ au lieu de $2k$ pour le nombre des barres principales de la travée l_i, on aura, pour déterminer les foyers,

$$\frac{l_i^2\left(1-\frac{1}{4k_i^2}\right)}{3v_i}+\frac{l_{i+1}^2\left(1-\frac{1}{4k_{i+1}^2}\right)}{3u_{i+1}}=2l_i\left(1+\frac{1}{2k_i}\right)+2l_{i+1}\left(1-\frac{1}{2k_{i+1}}\right),$$

et pour le théorème des deux moments

$$\frac{l_i^2\left(1-\frac{1}{4k_i^2}\right)}{3v_i}\mathfrak{M}_i+\frac{l_{i+1}^2\left(1-\frac{1}{4k_{i+1}^2}\right)}{3u_{i+1}}\mathfrak{M}_{i+1}=\mathrm{H}_i.$$

Si l'on suppose k_i infiniment grand, l'équation des foyers se réduit à

$$\frac{l_i^2}{3v_i}+\frac{l_{i+1}^2}{3u_{i+1}}=2(l_i+l_{i+1}),$$

qui est celle des poutres pleines. Pour peu que les travées soient grandes, les nombres k_i et k_{i+1} sont grands, les termes en $\frac{1}{k_i}$ et $\frac{1}{k_{i+1}}$ sont négligeables devant l'unité.

On arriverait à des résultats analogues en calculant Π_i dans l'hypothèse d'une charge unique appliquée à un nœud quelconque, ce qui permet de l'étendre à des charges quelconques grâce au principe de superposition.

On voit donc que, dans tous ces calculs, on peut sans inconvénient employer les formules et constructions graphiques des poutres pleines pour déterminer les moments de flexion, efforts tranchants et les réactions des appuis, ce qui permet de déterminer ensuite les tensions des barres soit à l'aide des figures réciproques, soit à l'aide du théorème de Ritter (§ 205).

On arriverait à des conclusions analogues en envisageant la poutre à triangles rectangles ou à triangles quelconques.

§ 654.

APPLICATION AUX ARCS RÉTICULAIRES CONTINUS OU A DES POUTRES CONTINUES. — Sachant traiter exactement ou approximativement les poutres réticulaires, on voit facilement à présent qu'on peut étendre aux arcs réticulaires continus ou reliés à des poutres continues la méthode exposée dans la Note II placée à la fin de la IIIe Partie. Dans l'expression de la poussée comme partout, on remplacera

$$\frac{M\,ds}{EI}$$

par

$$\frac{M\,a}{ES\overline{h^2}},$$

et les intégrations s'étendant à l'arc entier ou à une travée, par les sommations correspondantes.

NOTE I.

MÉMOIRE SUR LA RECHERCHE DES TENSIONS DANS LES SYSTÈMES DE BARRES ÉLASTIQUES ET SUR LES SYSTÈMES QUI, A VOLUME ÉGAL DE MATIÈRE, OFFRENT LA PLUS GRANDE RÉSISTANCE POSSIBLE (¹).

Objet et principaux résultats de ce Mémoire.

Soit un réseau de barres ou lignes élastiques liées entre elles par des articulations cylindriques ou sphériques : cylindriques, si toutes les barres sont situées dans un plan ; sphériques, dans le cas contraire.

Aux divers points d'articulation ou *sommets* de la figure sont appliquées des forces qui maintiennent le système en équilibre. On se propose de déterminer les tensions que ces forces développent dans les diverses barres.

Parfois la Statique seule suffit à résoudre ce problème ; mais le plus souvent elle le laisse indéterminé et, pour en obtenir la solution, il est nécessaire d'avoir égard à l'élasticité de la matière ou des matières composant les barres.

Habituellement on détermine alors leurs tensions en faisant usage des principes de la Résistance des matériaux. Comme le problème est, de sa nature, déterminé, si l'on écrit séparément, pour chaque barre, toutes les équations que fournit la Résistance en ayant égard aux liaisons de cette barre avec toutes celles qu'elle rencontre, on obtient finalement autant d'équations qu'il y a de forces inconnues à déterminer. C'est cette méthode (dont on peut faire remonter

(¹) Ce Mémoire a été présenté à l'Académie des Sciences le 28 avril 1873 et publié dans la Iʳᵉ édition de cet Ouvrage (1874). Malgré quelques redites avec ce qui été exposé dans la 1ʳᵉ Partie de l'édition actuelle, nous le reproduisons *in extenso,* avec quelques additions indiquées par des paragraphes dont les numéros portent des indices ou des astérisques.

Il est, en outre, complété par la Note I *bis*.

l'idée première jusqu'à Euler) que suivait Navier, et depuis elle a été appliquée avec succès, notamment par de Saint-Venant (¹) et Bresse (²).

Mais cette marche, qui exige l'introduction, à titre d'inconnues auxiliaires, de toutes les actions mutuelles que les barres exercent les unes sur les autres, est toujours pénible et souvent très difficultueuse dans la pratique.

Nous nous proposons d'indiquer ici une méthode qui offre le triple avantage d'être plus précise, d'être d'une application plus simple, et de mettre en évidence quelques résultats généraux que les méthodes habituelles permettraient difficilement d'apercevoir.

Parmi ces résultats, nous indiquerons les suivants :

Un système de barres distribuées d'une manière quelconque dans un plan ou dans l'espace étant en équilibre sous l'action de forces données, nous cherchons d'abord à quelles conditions le système doit satisfaire pour que la Statique permette de déterminer les tensions de toutes les barres qui le composent; nous établissons qu'il faut pour cela, et il suffit que la figure géométrique formée par les barres ne contienne pas de lignes *surabondantes,* c'est-à-dire qu'elle contienne au plus le nombre de lignes nécessaires pour la définir de forme.

La même proposition s'applique quand les points d'articulation des barres sont assujettis à certaines conditions, comme de demeurer fixes ou de se mouvoir sur des courbes ou des surfaces données. Dans ce cas, la figure ne doit pas contenir plus de lignes qu'il n'est strictement nécessaire pour la définir, *en ayant égard aux sujétions auxquelles elle est soumise.*

Nous cherchons ensuite comment, quand les barres sont élas-

(¹) *Leçons de résistance des matériaux professées à l'École des Ponts et Chaussées,* 1837-1838. — *Mémoire sur le calcul de la résistance et de la flexion des pièces solides à simple et à double courbure,* lu à l'Académie des Sciences le 30 octobre 1843.

(²) *Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes* (1856). — *Cours de résistance des matériaux professé à l'École des Ponts et Chaussées.* Dans son Mémoire de 1856, M. Bresse donne notamment une application aux ponts Vergnais, dont les constructeurs s'occupaient alors beaucoup; on y trouve aussi la démonstration de ce fait : que le nombre des équations fournies par la Résistance est nécessairement toujours égal à celui des indéterminées qu'elle introduit.

tiques, la théorie mathématique de l'élasticité permet de trouver leurs tensions dans les cas où la Statique les laisserait indéterminées. La proposition qui précède fournit pour cela une méthode générale extrêmement simple et commode.

Après ces préliminaires, nous abordons le problème le plus important au point de vue des applications : celui qui consiste à déterminer les sections d'un système de barres formant une figure géométrique donnée et soumis à des forces données, par la condition que toutes les barres tendues supportent même tension et toutes les barres pressées même pression, par unité de surface.

A en juger par les résultats obtenus en Résistance des matériaux, on serait porté à croire que ce problème est toujours possible et, au premier abord, on ne voit pas de raison pour qu'il en soit autrement; car il comporte autant d'équations du premier degré à satisfaire qu'il y a d'inconnues à déterminer.

Cependant la méthode que nous suivons indique qu'il est très souvent impossible et parfois indéterminé; nous établissons à cet égard le théorème suivant :

1° *Pour qu'un système de m barres en équilibre sous l'action de forces données puisse être constitué en solide d'égale résistance, il faut et il suffit,* en général, *que la figure géométrique formée par les axes des barres ne contienne pas de lignes surabondantes.*

2° *Toutes les fois qu'une figure formée de m lignes et contenant k lignes surabondantes peut être constituée en solide d'égale résistance, elle le peut d'une* k^{uple} *infinité de manières;* c'est-à-dire qu'on peut, dans ce cas, prendre arbitrairement (entre certaines limites) les sections de k barres, et, pourvu que les sections des $m - k$ autres soient convenablement choisies, *toutes* les barres travaillent de la même manière.

C'est là une propriété très remarquable sur laquelle nous reviendrons; mais arrêtons-nous d'abord à la première partie de la proposition que nous venons d'énoncer : elle conduit à cette conséquence nouvelle et importante, que les meilleures constructions, celles qui emploient le mieux la matière, sont, en général, les plus simples, celles qui ne sont pas surchargées de lignes et aussi les plus faciles à calculer, puisque, d'après la première proposition

énoncée plus haut, ce sont celles dont les forces intérieures peuvent s'obtenir par le seul secours de la Statique.

Cette conséquence nous semble devoir donner une nouvelle importance à la Statique graphique, dont les procédés simples et expéditifs remplacent alors, avec tant d'avantages, les calculs laborieux et souvent inextricables de la Statique ordinaire; elle est d'ailleurs bien d'accord avec le sentiment des plus grands constructeurs américains, puisque tous ces gigantesques ponts qu'ils exécutent depuis une vingtaine d'années sur leurs grands fleuves sont formés de systèmes articulés tellement disposés, que la Statique permette de déterminer les tensions des barres ou des câbles qui les composent. Nous verrons toutefois que le sentiment, si développé qu'il soit, ne suffit pas en pareille matière, et que, s'il a heureusement inspiré les ingénieurs des États-Unis en leur indiquant l'utilité de rechercher pour leurs grandes charpentes des formes simples, il ne les a pas amenés, en général, à découvrir, parmi ces formes, celles qui donnent lieu à la plus grande économie de matière, et que, sous ce rapport, les méthodes scientifiques et rigoureuses permettent d'apporter à leur œuvre des modifications importantes et vraiment avantageuses.

Il résulte de la seconde partie du théorème qui précède que, si les figures sans lignes surabondantes sont, en général, les seules qui se prêtent à la résistance égale, il est pourtant des cas exceptionnels où une figure à k lignes surabondantes peut être aussi édifiée en forme de système d'égale résistance, et qu'alors il le peut d'une k^{uple} infinité de manières, c'est-à-dire que le constructeur *dispose alors, dans certaines limites que le calcul assigne, des sections de k barres, sans perdre l'avantage de la résistance égale*. On comprend que ce soit là une faculté précieuse (¹), et comme en réalité, dans la pratique, la figure géométrique que forme une charpente destinée à résister à des efforts donnés n'est jamais commandée d'avance, on comprend qu'on puisse souvent la disposer de façon à satisfaire aux conditions voulues pour qu'elle se trouve dans ce cas exceptionnel de pouvoir être, d'une manière et, par suite, d'une infinité de manières, constituée en système d'égale résistance. Il y

(¹) Toutefois, dans la pratique, elle est, en général, limitée.

a lieu, dès lors, de se demander si ces figures, quand elles sont possibles, ne doivent pas être préférées à celles qui ne contiennent pas de lignes surabondantes, et si l'on ne pourrait pas mettre à profit l'indétermination que présentent les sections de leurs barres, pour réaliser une économie de matière. Le théorème suivant, que nous établissons, montre que cette question se résout par la négative :

Lorsqu'un système de barres contenant des lignes surabondantes satisfait aux conditions nécessaires pour qu'on puisse, d'une manière et, par suite, d'une infinité de manières, le constituer en solide d'égale résistance, il existe nécessairement un système formé par une partie seulement des barres données, ne contenant pas de lignes surabondantes et tel que, disposé en système d'égale résistance, il dépense exactement le même volume de matière que le système complet.

Ainsi, même dans les cas exceptionnels où il n'y a pas désavantage à employer des figures à lignes surabondantes, il n'y a pas intérêt à le faire, en sorte que l'on peut dire que toujours les figures simples peuvent être choisies en toute sécurité (¹); par exemple,

---

(¹) Nous ne prétendons pas que pratiquement il faille bannir d'une manière absolue les lignes surabondantes; mais nous posons la règle suivante, que nous croyons également conforme au bon sens et à la Science : le fond d'une ossature en bois ou en métal doit être une figure sans lignes surabondantes dont les dimensions soient calculées d'après les principes stricts de la théorie et dont les pièces soient réellement reliées entre elles par articulations. Maintenant si, parmi ces pièces, surtout parmi celles comprimées, il en est qui sont trop longues, qui pourraient fléchir soit sous l'action de leur propre poids, soit par suite de la compression qu'elles subissent, il faut nécessairement les soutenir par d'autres pièces; mais ces pièces, qui peuvent être, elles, des lignes surabondantes, doivent recevoir des sections très faibles, de façon à bien indiquer qu'elles sont là, non pour concourir à la résistance générale, mais comme simple soutien des pièces qui y concourent. Et il faudrait bien se garder de donner à ces pièces secondaires des dimensions considérables; car par là, outre qu'on gaspillerait la matière, dans beaucoup de cas, on se tromperait si l'on croyait obtenir un surcroît de sécurité : on pourrait, au contraire, produire au point de vue de la résistance un effet plus nuisible qu'utile, en modifiant complètement la répartition théorique des forces, répartition d'après laquelle les pièces ont été calculées.

Un Ouvrage remarquable où, croyons-nous, ces préceptes ont été suivis, est le pont d'Arcole. L'arc est réuni au couronnement du tympan par de simples triangles. Seulement les côtés trop longs de ces triangles sont soutenus par des barres secondaires et très grêles; et c'est précisément parce que cet Ouvrage est disposé d'une façon si rationnelle qu'il unit à une grande solidité un si haut degré d'élégance.

une poutre simplement triangulée est préférable à la poutre à croix de Saint-André, celle-ci préférable à la poutre à treillis, et ainsi de suite.

Puisqu'il en est ainsi, pour trouver, parmi toutes les figures possibles, celles qui, pour résister à des efforts donnés, par exemple à des charges verticales, dépensent le moindre volume de matière, il suffit de les chercher parmi les figures sans lignes surabondantes, c'est-à-dire, en vertu du premier des théorèmes énoncés dans ce qui précède, parmi celles auxquelles la Statique est applicable. Cette recherche n'offre donc aucune difficulté : elle exige seulement des calculs plus ou moins laborieux ; nous l'avons faite pour les poutres les plus usitées en Europe et aux États-Unis. Nous devons quelques-uns des calculs relatifs à cette partie de notre travail à l'obligeance de notre ami M. Brune, ancien élève de l'École Polytechnique et de l'École des Beaux-Arts, professeur de construction à cette dernière école ; qu'il nous soit permis de lui en exprimer ici nos remerciements (¹).

Nous donnons un Tableau comparé des volumes de matière nécessaires pour résister soit à une charge permanente, soit à une charge roulante, soit aux deux charges réunies, suivant qu'on emploie les diverses variétés des poutres triangulées, ou les poutres américaines les plus estimées, et nous arrivons à cette conséquence, qu'en général les nouvelles poutres armées à l'américaine, quelque séduisantes qu'elles paraissent, sont bien loin d'être les plus économiques, et que les systèmes simplement triangulés, peu goûtés en France, mais depuis longtemps très usités en Angleterre, sous le nom de *poutres de Warren,* sont bien préférables. Comme, d'un autre côté, il résulte de l'un des théorèmes énoncés que ces poutres sont préférables à celles en croix de Saint-André (qui contiennent des lignes surabondantes), que celles-ci sont préférables aux poutres à treillis plus chargées encore de lignes surabondantes, on peut conclure que les poutres simplement triangulées doivent, en principe, être préférées à toutes celles actuellement usitées. Les tableaux numériques que nous donnons montrent d'ailleurs que

(¹) Nous remercions aussi M. le professeur Alexander, qui a bien voulu traduire en anglais cette partie de notre travail et, à cette occasion, revoir tous nos calculs numériques, dans lesquels il nous a signalé quelques erreurs que nous avons rectifiées dans la présente édition.

ce ne sont pas de légères, mais de très grandes économies que l'on réalise, en suivant rigoureusement, en cette matière, les préceptes de la théorie.

De plus, par ces Tableaux, on peut, en quelques instants, faire les devis comparatifs de plusieurs poutres prises parmi les meilleures et choisir, dans chaque cas, la plus économique de toutes.

I.

Conditions pour que la Statique suffise à déterminer les tensions d'un système de barres.

§ 1.

Pour arriver à résoudre d'une manière générale le problème de la recherche des tensions dans un système de barres en équilibre, nous chercherons d'abord à reconnaître dans quels cas la Statique seule peut en fournir la solution.

Pour cela, nous remarquerons que toute la Statique se résume en définitive dans le seul principe des vitesses virtuelles. Donc, si elle n'est pas impuissante à résoudre le problème que nous avons en vue, le principe des vitesses virtuelles devra donner tout à la fois et les conditions à remplir par les forces extérieures appliquées à un système de barres pour qu'elles demeurent en équilibre, et les tensions de ces barres.

Pour trouver les conditions d'équilibre entre les forces extérieures, il suffit évidemment de donner, aux points d'articulation des barres, tous les déplacements compatibles avec leurs liaisons, en supposant d'ailleurs les barres parfaitement inflexibles et inextensibles; ces conditions, nous ne nous en occuperons pas : nous les supposons satisfaites, puisque nous admettons que le système est en équilibre.

Pour trouver maintenant toutes les relations que le principe des vitesses virtuelles peut fournir entre les tensions des barres, concevons l'une d'elles, celle qui relie deux sommets A et B, coupée près de chacune de ses extrémités; l'équilibre ne sera pas troublé si, aux deux points A et B et suivant la ligne AB, on applique

deux forces égales et contraires, égales à la tension de la barre coupée.

Donnons au système privé de la barre AB tous les déplacements compatibles avec ses liaisons, en supposant les barres qui la composent parfaitement rigides. Ceux de ces déplacements qui ne modifient pas la distance entre les points A et B sont ceux qu'on a déjà dû donner pour trouver les conditions d'équilibre entre les forces extérieures; ils fourniront des équations où n'entrera pas la tension de la barre AB : ils ne pourront donc pas servir à déterminer cette tension. Pour qu'il soit possible de la découvrir par le seul secours de la Statique, il faut que l'on puisse donner au système un déplacement virtuel altérant la longueur AB, les longueurs de toutes les autres restant invariables; réciproquement, toutes les fois qu'un tel déplacement sera possible, en lui appliquant le théorème des vitesses virtuelles, on trouvera une équation entre les forces extérieures et la tension cherchée, en sorte que cette tension se trouvera déterminée.

Ainsi, pour qu'on puisse trouver, par la Statique, la tension d'une barre AB, il faut et il suffit que la figure géométrique formée par les axes des barres soit telle qu'on puisse donner au côté AB de cette figure un petit allongement virtuel, tous les autres côtés conservant leurs longueurs.

De là résulte que, pour que l'on puisse trouver, par la Statique seule, les tensions de toutes les barres, il faut et il suffit que la figure géométrique formée par leurs axes soit telle que chacun de ses côtés puisse recevoir un allongement virtuel, tous les autres conservant leurs longueurs; en d'autres termes, il faut et il suffit, si m est le nombre des barres, que les m côtés de la figure géométriques qu'elles forment puissent recevoir m allongements virtuels indépendants les uns des autres. Ainsi :

Théorème I. — *Pour que la Statique puisse fournir les tensions d'un système de barres, il faut et il suffit,* sans aucune exception, *qu'il soit librement dilatable* (¹).

(¹) Cet énoncé, qui ressort de la démonstration, n'avait pas été explicitement formulé dans la 1ʳᵉ édition. Il mérite de l'être, comme ne donnant lieu à aucune exception. Il en est de même du théorème III ci-après.

Mais dire que les m côtés d'une figure géométrique peuvent recevoir m allongements infiniment petits, indépendants les uns des autres, sans que la figure cesse d'être possible, équivaut à dire (sauf les cas d'exception qui font l'objet de la Note I *bis*) que la figure peut être construite en prenant arbitrairement les longueurs de tous ses côtés; car cela exige qu'entre ces longueurs il n'existe aucune relation algébrique permettant de déduire l'une d'elles de la connaissance des autres. Donc :

Théorème I *bis*. — *Pour que la Statique puisse fournir les tensions d'un système de barres, il faut et il suffit,* sous réserve des cas d'exception mentionnés, *que la figure géométrique formée par les axes de ces barres soit telle, qu'on puisse la construire en se donnant arbitrairement les longueurs de tous ses côtés.*

§ 2.

Supposons à présent une figure à m côtés, qui ne puisse recevoir que $m-k$ dilatations virtuelles distinctes, c'est-à-dire qui soient telles que, si l'on se donne arbitrairement les dilatations de $m-k$ de ses m côtés, les dilatations des k autres s'ensuivent.

Alors il est clair que le principe des vitesses virtuelles ne fournira entre les tensions des m barres que $m-k$ équations distinctes. Ainsi :

Théorème II. — *Si une figure à m côtés ne peut recevoir que $m-k$ dilatations virtuelles distinctes, la Statique fournira k équations de trop peu pour déterminer les tensions de ses barres.*

Cet énoncé ne souffre aucune exception.

Cela aura lieu (et, *en général,* sauf les cas d'exception discutés dans la Note, cela n'aura lieu que dans ce cas) toutes les fois que le nombre m des côtés de la figure est tel que celle-ci soit entièrement définie par la connaissance de $m-k$ d'entre eux, en sorte qu'elle contient k lignes *surabondantes,* c'est-à-dire k lignes de plus qu'il n'est *strictement* nécessaire pour la définir. Alors il est clair que ses m côtés ne pourront subir que $m-k$ allongements

virtuels distincts ou indépendants les uns des autres; la Statique ne fournira par suite, entre les tensions des barres, que $m-k$ relations; inversement, si, entre les tensions de m barres, la Statique ne fournit que $m-k$ relations, cela indique que ces m barres ne peuvent recevoir que $m-k$ allongements virtuels distincts, et que, par suite, leur figure géométrique est entièrement définie de forme par la connaissance de $m-k$ de ses côtés. Ainsi:

Théorème II *bis*. — *Toutes les fois que la figure géométrique formée par un système de barres contient k lignes surabondantes, la Statique fournira k équations (et, en général, seulement k) de trop peu pour définir les tensions de ces barres, et inversement, si la Statique fournit k équations de trop peu pour définir les tensions d'un système de barres, on est certain que la figure géométrique qu'elles forment contient k lignes surabondantes.*

Remarque. — En général (et sauf les exceptions discutées dans la Note I *bis*), les théorèmes qui précèdent permettent, à la simple inspection d'une figure, de voir si la Statique pourra ou non faire connaître les tensions de ses côtés.

Soient, en effet, m le nombre des côtés et n le nombre des sommets ou points d'articulation d'une figure.

Si la figure est plane, et que

$$m \leqq 2n-3, \tag{1}$$

la figure peut être construite d'une ou d'une infinité de manières. et la Statique permet de trouver les tensions de ses côtés. En effet, elle est déterminée de forme et de position, si l'on se donne $2n$ conditions permettant de déterminer les $2n$ coordonnées de ses n sommets; elle est donc, *en général,* déterminée de forme par $2n-3$ conditions, puisque trois conditions définissent sa position dans le plan.

Si

$$m = 2n-3+k, \tag{1 bis}$$

k étant un nombre positif, la figure contient k lignes surabondantes, et la Statique fournira k équations de trop peu entre les tensions de ses barres.

Si la figure n'est pas plane, elle pourra être construite si

$$(2) \qquad m \leqq 3n - 6,$$

et elle renfermera k lignes surabondantes si

$$(2\ bis) \qquad m = 3n - 6 + k;$$

mais il ne faut pas perdre de vue que ces formules sont sujettes à exceptions, tandis que les théorèmes I et II n'en souffrent aucune.

§ 3.

Les théorèmes I et II s'appliquent non seulement aux figures libres, mais aussi à celles dont les points d'articulation sont assujettis à certaines conditions, comme de demeurer fixes ou de glisser sur des courbes ou des surfaces données, ou de conserver entre eux des distances invariables; seulement, dans ce cas, on ne doit compter comme distincts que les allongements compatibles avec les sujétions des points d'articulation, puisque le principe des vitesses virtuelles s'applique alors à de tels mouvements.

Dans ces sortes de figures, on aura à déterminer, outre les tensions des barres, les réactions des appuis; mais on peut remarquer que, les tensions une fois connues, les réactions des appuis s'ensuivent. Il suffit d'écrire que chacun des sommets non libres est en équilibre sous l'action : 1° des forces extérieures qui y sont directement appliquées; 2° des tensions des barres qui y aboutissent; 3° de la réaction qu'il subit de la part de son appui. On obtient ainsi trois équations qui fourniront les trois composantes de cette réaction. Ainsi :

Théorème III. — *Pour que la Statique permette de déterminer les tensions des barres et les réactions des appuis d'un système articulé dont certains points d'articulation sont assujettis à rester finis ou à demeurer sans frottement, sur des courbes ou des surfaces données, il faut et il suffit que les m côtés de la figure puissent recevoir m dilatations virtuelles indépendantes les unes des autres, et toutes compatibles avec les sujétions des points d'articulation.*

Si, au contraire, entre ces dilatations, il existe k relations

résultant de la forme de la figure, de sorte que m — k d'entre elles seulement soient arbitraires, la Statique fournit k équations de moins qu'il n'est nécessaire pour la détermination des tensions des barres et des réactions des appuis.

Ce théorème n'est sujet à aucune exception.

A présent, *en général,* et toujours sous réserve des exceptions qui font l'objet de la Note ci-après, il peut être remplacé par le suivant :

THÉORÈME III *bis.* — *Si l'on peut construire, en prenant arbitrairement les longueurs de tous ses côtés, une figure formée par m barres sans cesser de satisfaire aux conditions auxquelles sont assujettis les sommets de la figure, la Statique permet de trouver les tensions de toutes ces barres et les réactions de leurs appuis.*

Mais si, en ayant égard aux conditions auxquelles sont assujettis les sommets, la connaissance de m — k des m côtés de la figure suffit à la définir, la Statique fournira k équations de trop peu (et, en général, seulement k), pour déterminer les tensions des barres et les réactions de leurs appuis.

Remarque I. — Une conséquence immédiate de ce théorème, c'est que, si l'on sait trouver les tensions des barres d'une figure libre, on peut encore trouver ces tensions ainsi que les réactions des appuis, toutes les fois que la figure est assujettie à des conditions ne faisant que déterminer en tout ou en partie sa position dans l'espace sans influer sur sa forme.

Cette conséquence était facile à prévoir; car les conditions dont il s'agit peuvent être au plus au nombre de six dans l'espace et de trois dans le plan; et, par suite, les équations d'équilibre entre les forces extérieures (au nombre de six dans l'espace et de trois dans le plan), permettent de déterminer *a priori* les réactions des appuis, et, une fois ces réactions connues, on peut les adjoindre aux forces données et regarder la figure comme libre.

Remarque II. — En général, et sauf les cas exceptionnels mentionnés, le théorème ci-dessus permet, à l'inspection d'une figure, quelles que soient les conditions auxquelles elle est assu-

jettie, de voir si la Statique pourra définir les tensions de ses barres et les réactions de ses appuis.

Soient, en effet, m le nombre des barres ou côtés de la figure, n le nombre de ses sommets et i le nombre des conditions auxquelles sont assujettis ses sommets. Si i est inférieur à 6 pour les figures de l'espace et à 3 pour les figures planes soumises à des forces situées dans leur plan, la Statique s'applique comme si la figure était libre, et il suffira de recourir aux formules (1) et (2). Si $i > 6$ dans l'espace ou > 3 dans le plan, la Statique permettra de résoudre le problème, si pour les figures de l'espace on a

$$m \leqq 3n - 6 - i \tag{3}$$

et pour les figures planes

$$m \leqq 2n - 3 - i; \tag{4}$$

elle fournira $k + i$ équations de moins que le nombre total des tensions et réactions inconnues, si

$$m = 3n - 6 + k \tag{3 bis}$$

pour les figures de l'espace, et

$$m = 2n - 3 + k \tag{4 bis}$$

pour les figures planes.

II.

Méthode générale pour trouver les tensions dans un système de barres élastiques lorsque la Statique laisse le problème indéterminé.

§ 1.

Voyons maintenant comment on pourra résoudre le problème de la recherche des tensions et des réactions des appuis pour des barres élastiques en nombre quelconque et soumises à des sujétions quelconques, lorsque, comme dans quelques-uns des exemples précédents, la Statique devient impuissante.

On commencera par écrire, entre les tensions des barres, toutes les relations que fournit la Statique; pour cela, il suffira de con-

cevoir qu'on donne aux côtés de la figure géométrique formée par les barres tous les allongements virtuels compatibles avec les liaisons; le principe des vitesses virtuelles ne fournira alors que des relations où n'entreront pas les réactions des appuis et qui auront lieu entre les tensions des barres virtuellement allongées et les forces extérieures données qui agissent sur le système.

Si les relations ainsi obtenues étaient en nombre égal à celui des barres, le problème serait résolu sans qu'on ait besoin d'avoir égard à l'élasticité des barres. Si, au contraire, on obtient ainsi $m - k$ relations seulement entre les tensions des m barres de la figure, on peut être certain, d'après le théorème III (et sauf les exceptions qui seront discutées dans la Note I *bis*), qu'il existe, entre les longueurs de ces barres, k relations géométriques permettant de déduire les longueurs de k de ces barres de la connaissance des longueurs des $m - k$ autres.

Soient

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$$

les longueurs des m barres à l'état naturel, c'est-à-dire lorsque aucune force n'agit sur elles.

Sous l'influence des forces appliquées aux divers points d'articulation, ces barres prendront des allongements

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_m,$$

en sorte que leurs nouvelles longueurs seront

$$a_1 + \alpha_1, a_2 + \alpha_2, \ldots, a_m + \alpha_m.$$

Puisque entre ces longueurs il existe k relations algébriques, soit

$$(5) \qquad F(a_1 + \alpha_1, a_2 + \alpha_2, a_3 + \alpha_3, \ldots, a_m + \alpha_m) = 0$$

une de ces relations.

Si t_i est la tension, S_i la section et E_i le coefficient d'élasticité de la barre dont la longueur primitive était a_i et dont l'allongement est α_i, on aura, d'après les principes les plus élémentaires de la théorie mathématique de l'élasticité,

$$(6) \qquad \alpha_i = \frac{a_i t_i}{E_i S_i}.$$

Portant ces valeurs de α_i dans les k relations (5), ces relations

auront lieu entre les tensions inconnues t_i, et, jointes aux $m - k$ relations, entre ces tensions, déjà fournies par la Statique, elles achèveront de les définir.

Les k relations ainsi obtenues ne seront, en général, pas linéaires. On peut les remplacer par des relations linéaires. A cet effet, observons qu'avant les allongements des barres il existait, entre leurs longueurs, k relations que l'on obtiendra en faisant dans les équations (5)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = 0,$$

ce qui donne

$$F(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m) = 0. \tag{7}$$

Retranchons ces équations des équations correspondantes (5), en négligeant les quantités de l'ordre du carré des allongements α_i, ce qui est permis, dans la limite d'approximation que comporte la théorie mathématique de l'élasticité.

Si l'on fait, pour abréger,

$$F(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m) = F,$$

on aura

$$\frac{dF}{da_1}\alpha_1 + \frac{dF}{da_2}\alpha_2 + \ldots + \frac{dF}{da_m}\alpha_m = 0, \tag{8}$$

et, à cause de (6),

$$\frac{dF}{da_1}a_1\frac{t_1}{E_1 S_1} + \frac{dF}{da_2}a_2\frac{t_2}{E_2 S_2} + \ldots + \frac{dF}{da_m}a_m\frac{t_m}{E_m S_m} = 0. \tag{9}$$

Telles sont les k relations à joindre à celles fournies par la Statique pour définir les tensions t_i.

Remarque I. — Toutes les équations qui fournissent les tensions étant linéaires, on voit que, si deux systèmes de forces agissent simultanément aux divers sommets d'une figure, les tensions qu'elles produisent sur ses divers côtés s'obtiennent en additionnant celles que produirait chacun des deux systèmes de forces agissant successivement.

Remarque II. — Lorsque la Statique seule suffit à déterminer les tensions d'un système de barres, ces tensions ne dépendent

que de la forme géométrique de la figure formée par les axes des barres; mais, lorsque la Statique laisse les tensions indéterminées et que, pour achever de les définir, il faut avoir égard à l'élasticité de la matière, elles dépendent non seulement de la forme géométrique de la figure que forment les barres, mais aussi des sections S de ces barres et de leurs coefficients d'élasticité E. Dans le premier cas, si l'on vient à altérer les sections des barres, leurs tensions n'en sont pas modifiées, mais seulement l'allongement élastique de chacune d'elles; dans le second, on peut, d'une infinité de manières, altérer les tensions des diverses barres en modifiant convenablement leurs sections.

§ 5.

Pour donner un exemple de l'application de cette méthode, supposons (*fig. b, Pl. XLIV*) que, dans un mur vertical ZZ', on prenne un nombre quelconque p de points fixes $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$, d'où l'on fait partir des tiges élastiques concourant en un point A, et qu'en ce point on applique une force R; on demande de trouver les tensions que cette force produit sur les tiges.

Comme la force donnée R et les tensions inconnues concourent toutes au même point, la Statique ne fournit que deux équations d'équilibre; elle ne permet donc de trouver les tensions des p barres que dans le cas particulier où elles sont au nombre de $p = 2$; dans ce cas, en effet, il suffit de décomposer la force R, suivant les directions des deux barres, pour obtenir leurs tensions. Si l'on veut trouver les tensions, dans le cas général d'un nombre quelconque de barres, il suffit de remarquer que les longueurs de deux barres seulement sont arbitraires; que, ces longueurs une fois données, le point A est déterminé, et, par suite, les longueurs de toutes les autres barres le sont aussi. Donc, entre les longueurs des p barres, il existe $p - 2$ relations géométriques.

Si, par exemple, les points $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sont équidistants, on voit de suite qu'entre les longueurs b_i, b_{i+1}, b_{i+2} de trois barres consécutives il existe la relation

$$b_i^2 + b_{i+2}^2 = 2b_{i+1}^2 + 2a^2,$$

en appelant a la distance constante $a_1 a_2 = a_2 a_3 = \ldots$ entre deux

points fixes consécutifs; et si β_i, β_{i+1}, β_{i+2}, ... sont les allongements élastiques des barres, on a, après la déformation de la figure,

$$(b_i + \beta_i)^2 + (b_{i+2} + \beta_{i+2})^2 = 2(b_{i+1} + \beta_{i+1})^2 + 2a^2.$$

En retranchant l'avant-dernière égalité de la dernière et négligeant les carrés des allongements,

$$b_i\beta_i + b_{i+2}\beta_{i+2} = 2b_{i+1}\beta_{i+1}. \tag{a}$$

Or la formule (6) donne

$$\beta_i = \frac{b_i t_i}{E_i S_i},$$

en appelant t_i la tension de la barre de longueur b_i, de section S_i, et un coefficient d'élasticité E_i.

Donc la relation (a) devient

$$b_i^2 \frac{t_i}{E_i S_i} + b_{i+2}^2 \frac{t_{i+2}}{E_{i+2} S_{i+1}} = 2b_{i+1}^2 \frac{t_{i+1}}{E_{i+1} S_{i+1}}; \tag{b}$$

d'où ce théorème :

Le produit de la tension d'une tige par unité de surface et par unité du coefficient d'élasticité par le carré de sa longueur est la moyenne des produits analogues pour les deux tiges adjacentes.

Ce théorème donne une relation entre les tensions de trois tiges consécutives quelconques; il fournit donc, entre les tensions des p tiges, $p - 2$ relations qui, jointes aux deux relations de la Statique, permettent de déterminer toutes les tensions. Les équations ainsi obtenues se résolvent d'ailleurs, quel qu'en soit le nombre, d'une façon très simple.

On satisfait en effet, quel que soit le nombre entier i, aux $p - 2$ relations (b) par l'expression générale

$$b_i^2 \frac{t_i}{E_i S_i} = iA + B, \tag{10}$$

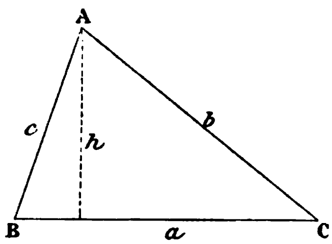
où A et B sont deux constantes arbitraires. On a donc ainsi l'expression de toutes les tensions au moyen des deux indéterminées A et B, que l'on détermine en portant les valeurs t_i ainsi obtenues dans les deux équations fournies par la Statique.

§ 6.

Lemme. — Soit ABC un triangle, désignons par a, b, c les longueurs de ses trois côtés.

Supposons que, sous une influence quelconque, ils prennent des allongements positifs ou négatifs très petits α, β, γ. On demande de trouver la valeur de l'accroissement positif ou négatif δA qui en résultera pour l'un des angles du triangle.

Fig. a.



L'accroissement δA est naturellement de même ordre de grandeur que les allongements α, β, γ, de sorte qu'on en néglige le carré.

Dans le triangle primitif (*fig*. a) on a

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Dans le triangle déformé, on a de même

$$\cos(A + \delta A) = \frac{(b + \beta)^2 + (c + \gamma)^2 - (a - \alpha)^2}{2(b + \beta)(c + \gamma)}.$$

Retranchant membre à membre et négligeant les quantités de l'ordre des carrés de α, β, γ, δA, il vient

$$-\sin A\,\delta A = \frac{b\beta + c\gamma - a\alpha}{bc} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\,\frac{b\gamma + c\beta}{bc},$$

qu'on aurait pu écrire directement en différentiant l'expression de $\cos A$ et remplaçant les différentielles dA, da, db, dc respectivement par δA, α, β, γ.

On peut encore écrire cette équation, en observant que

$$bc \sin A = a \times h,$$

h étant la hauteur abaissée du point A,

$$\delta A = \frac{a\alpha - (b - c\cos A)\beta - (c - b\cos A)\gamma}{ah}$$

ou

(c) $$\delta A = \frac{a\alpha - a\beta\cos C - a\gamma\cos B}{ah}$$

ou, en supprimant le facteur a,

(c_1) $$\delta A = \frac{\alpha - \beta\cos C - \gamma\cos B}{h},$$

formules faciles à retenir.

Si l'on conçoit qu'on porte les allongements positifs ou négatifs α, β et γ sur leurs côtés respectifs, sur le prolongement des côtés si ce sont des allongements et sur les côtés eux-mêmes dans le cas contraire, qu'on projette les lignes β et γ sur a, en désignant les projections par β_a et γ_a, on peut écrire

(c_2) $$\delta A = \frac{\alpha - \beta_a - \gamma_a}{h}.$$

La formule (c) peut de même s'écrire

(c_3) $$\delta A = \frac{a\alpha - a_b\beta - a_c\gamma}{2\Delta},$$

en désignant par a_b, a_c les projections du côté a sur les côtés b et c comptées positivement ou négativement suivant qu'elles tombent sur les côtés ou sur leurs prolongements et par Δ l'aire du triangle.

Remarque. — Supposons que le côté a opposé à l'angle A que l'on considère se dilate seul, en sorte que $\beta = \gamma = 0$.

On aura

(c_4) $$\delta A = \frac{\alpha}{h}.$$

Si un seul côté d'un triangle se dilate d'une quantité positive ou négative α, l'angle opposé à ce côté varie en grandeur et

signe du quotient $\frac{\alpha}{h}$ *de la longueur* α *par la hauteur du triangle abaissée du sommet de cet angle.* (Théorème établi au § 612.)

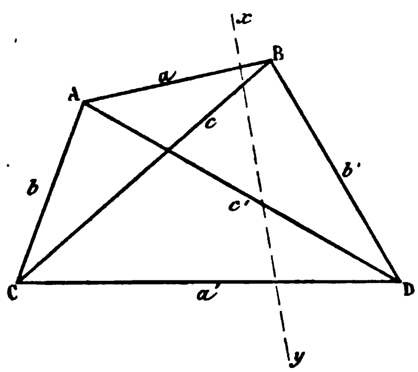
Si c'est un des côtés adjacents à l'angle A qui varie seul, par exemple le côté b', en sorte que $\alpha = \gamma = 0$, on a

$$(c_6) \qquad \delta A = -\frac{\beta a}{h} = -\frac{\beta \cos C}{h}.$$

§ 6_a.

RELATION ENTRE LES DILATATIONS DE SIX LIGNES JOIGNANT QUATRE POINTS. — Soit (*fig. b*) une figure formée par six lignes joignant

Fig. *b*.



quatre points d'un plan. Nous les désignons par les lettres a, a'; b, b'; c, c' comme l'indique la figure. Nous désignerons leurs allongements positifs ou négatifs par les lettres grecques correspondantes α, α'; β, β'; γ, γ'.

Entre ces allongements, il existe une relation qu'il s'agit de trouver.

Soient A, B, C, D les quatre angles du quadrilatère. On a

$$A + B + C + D = 2\varpi.$$

Si la figure se déforme, la somme des nouveaux angles sera

encore 2ϖ. Si donc on désigne par la caractéristique δ les variations des angles, on aura

$$\delta A + \delta B + \delta C + \delta D = 0.$$

Soient h_A, h_B, h_C, h_D les hauteurs abaissées des sommets A, B, C, D sur les diagonales.

Le triangle ABC donne, en appliquant la formule (c_2),

$$\delta A = \frac{\gamma - \alpha_c - \beta_c}{h_A}.$$

De même le triangle CBD donne

$$\delta D = \frac{\gamma - \alpha'_c - \beta'_c}{h_D}.$$

De même les triangles ABD et ACD donnent

$$\delta B = \frac{\gamma' - \alpha_{c'} - \beta'_{c'}}{h_B},$$

$$\delta C = \frac{\gamma' - \alpha'_{c'} - \beta_{c'}}{h_C}$$

et, en ajoutant,

$$(71) \quad 0 = \frac{\gamma - \alpha_c - \beta_c}{h_A} + \frac{\gamma - \alpha'_c - \beta'_c}{h_D} + \frac{\gamma' - \alpha_{c'} - \beta'_{c'}}{h_B} + \frac{\gamma' - \alpha'_{c'} - \beta_{c'}}{h_C}.$$

Telle est la relation cherchée.

Si l'on avait appliqué la formule (c_3), on l'aurait obtenue sous la forme

$$(72) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 = &+ \frac{c\gamma - c_a\alpha - c_b\beta}{\text{BAC}} + \frac{c\gamma - c_{a'}\alpha' - c_{b'}\beta'}{\text{BDC}} \\ &+ \frac{c'\gamma' - c'_a\alpha - c'_{b'}\beta'}{\text{ABD}} + \frac{c'\gamma' - c'_{a'}\alpha' - c'_b\beta}{\text{ACD}}, \end{aligned} \right.$$

en désignant les aires des triangles par leurs trois sommets.

Cas du trapèze. — Supposons les côtés A et A' parallèles (*fig.* c, p. 218). Les deux triangles BAC et ABD sont égaux et le double de leur aire est ha, en appelant h la hauteur du trapèze.

De même les deux triangles BDC et ACD sont égaux et le double de leur aire est ha'.

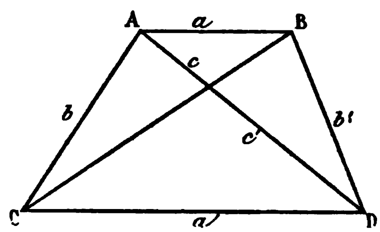
De plus, $c_a = c_{a'}$, $c_a = c'_{a'}$,

$$a_a + c'_a = c_{a'} + c'_{a'}.$$

Par suite, l'équation (7 *bis*) devient

$$(8_1) \qquad c\gamma + c'\gamma' - a\alpha' - a'\alpha = \frac{(ac'_b + a'c_b)\beta + (ac_{b'} + a'c'_b)\beta'}{a + a'}.$$

Fig. c.



Si le trapèze est isoscèle,

$$b = b', \qquad c = c', \qquad c_b = c'_{b'}, \qquad c_{b'} = c'_b.$$

Par suite,

$$(9_1) \qquad c(\gamma + \gamma') = a\alpha' + a'\alpha + \frac{a'c_b + ac_{b'}}{a + a'}(\beta + \beta').$$

Cas du parallélogramme. — Dans la formule (8), on doit faire

$$a = a', \qquad b = b', \qquad c_b = c_{b'}, \qquad c'_b = c'_b$$

et

$$c_b + c'_{b'} = c_b + c'_b = c_{b'} + c'_b = 2b;$$

d'où

$$(10_1) \qquad c\gamma + c'\gamma' = a(\alpha + \alpha') + b(\beta + \beta').$$

Enfin, dans le cas d'un rectangle, on a

$$(11_1) \qquad c(\gamma + \gamma') = a(\alpha + \alpha') + b(\beta + \beta').$$

Si l'on considère, d'après cela, un quadrilatère ABCD en équilibre sous l'action de forces agissant en ses quatre sommets :

1° En écrivant que chaque sommet est en équilibre, on obtient $2n - 3 = 5$ relations entre les six tensions inconnues. En y adjoignant l'une des équations (7_1), (8_1), (9_1), (10_1) ou (11_1), suivant la forme du quadrilatère considéré, et y remplaçant les allongements

α, α', β, β', γ, γ' en fonction des tensions inconnues des sections et des coefficients d'élasticité, on aura une sixième équation.

Si l'on a des croix de Saint-André, on écrira les équations de la Statique pour chaque nœud, et l'on y adjoindra pour chaque panneau une équation comme celle dont il vient d'être parlé.

§ 6_b.

Quel que soit le système considéré, la recherche des équations (7) ou (8) du § 4, d'où se déduisent celles (9) à adjoindre aux conditions d'équilibre de la Statique pour déterminer les tensions, est un problème de Géométrie élémentaire pouvant donner lieu à des calculs plus ou moins laborieux, mais qu'il n'est jamais difficile de résoudre. Nous venons de voir comment on le résout dans les exemples simples qui précèdent. Au Chapitre VI il se trouve résolu pour les systèmes réticulaires ou simplement triangulaires avec barres surabondantes.

L'équation (7_1) ou (7_2) du paragraphe précédent permet de le résoudre toujours. En effet, considérons d'abord un système de n points, reliés deux à deux, c'est-à-dire contenant $\frac{n(n-1)}{2}$ lignes et, par suite, $k = \frac{n(n-1)}{2} - (2n-3) = -\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ lignes surabondantes. Prenons (*fig. c*) deux de ces points arbitrairement choisis C et D et concevons qu'on joigne chacun des autres points A, B, ... du système à ces deux points C et D. L'allongement d'une ligne AB joignant deux points quelconques A et B du système peut, par l'une des formules sus-mentionnées, être obtenue en fonction des allongements des cinq lignes AC, AD; BC, BD; CD. Donc, l'allongement de toute ligne n'aboutissant pas aux deux points C et D peut être exprimé en fonction des allongements des lignes aboutissant en l'un de ces points et de la ligne CD.

Et, comme le nombre de ces dernières lignes est $2n-3$, on aura ainsi autant de relations qu'il y a de lignes surabondantes.

Supposons à présent que la figure ne renferme pas toutes les lignes joignant les n points donnés deux à deux; désignons par

$$a_i, \quad a_j, \quad a_k, \quad \ldots$$

celles qui manquent et par

(α) $\alpha_i, \ \alpha_j, \ \alpha_k, \ \ldots$

leurs allongements.

Entre les équations obtenues dans l'hypothèse d'une figure complète, éliminons les quantités (α); il restera autant de relations entre les allongements des lignes existant dans la figure qu'il y en a de surabondantes.

Ainsi, par de simples éliminations entre des équations linéaires, on obtient les relations géométriques (q), quelle que soit la figure.

On peut aussi les obtenir par des considérations purement mécaniques.

C'est ce qui a été fait d'abord par le général Menabrea.

Méthode du général Menabrea. — Dans un beau Mémoire publié à Turin en 1868, sous le titre : *Principe général pour déterminer les pressions et les tensions dans un système élastique,* le général Menabrea s'appuyait, pour lever l'indétermination que la Statique peut laisser subsister dans le problème, sur un *principe de minimum du travail élastique* (¹), principe d'abord contesté, mais dont les résultats concordent parfaitement avec notre méthode, ainsi que l'illustre auteur l'a encore récemment constaté, dans un Mémoire lu à la séance de l'Académie des Sciences du 24 mars 1884. Dans ce Mémoire, il fait ressortir la possibilité d'obtenir les relations purement géométriques (g) en appliquant son principe du travail maximum. En effet, si α_i est l'allongement d'une barre de longueur a_i, de section S_i et de coefficient d'élasticité E_i, la tension qui s'y produit

$$t_i = \frac{E_i S_i}{a_i}\alpha_i = k_i \alpha_i,$$

en posant, pour abréger, $\frac{E_i S_i}{a_i} = k_i$.

Le travail de cette force est

$$\frac{1}{2} k_i \alpha_i^2 \quad (^2),$$

(¹) *Voir* aussi une Note lue par le général Menabrea à la séance de l'Académie des Sciences du 31 mai 1858.

(²) *Voir* plus loin § 18.

et la somme des travaux des forces élastiques est

$$\frac{1}{2}\sum k_i \alpha_i^2,$$

la somme s'étendant à toutes les barres. Si, parmi les allongements α_i géométriquement possibles, ceux-là se produisent qui rendent ce travail un minimum, on aura

$$(\alpha) \qquad \sum k_i \alpha_i \, \delta\alpha_i = 0.$$

A présent la Statique donne trois équations d'équilibre pour chaque nœud, à savoir

$$(\beta) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_s + \sum_s k_i \alpha_i \cos\lambda_i &= 0, \\ Y_s + \sum_s k_i \alpha_i \cos\mu_i &= 0, \\ Z_s + \sum_s k_i \alpha_i \cos\nu_i &= 0, \end{aligned} \right.$$

en désignant par X_s, Y_s, Z_s les composantes de la force extérieure appliquée au nœud quelconque N_s, par $\sum_s$ une somme s'appliquant aux tensions $k_i\alpha_i$ des barres issues de ce nœud et par λ_i, μ_i, ν_i les angles connus que cette force fait avec les axes de coordonnées. Les équations (β) ayant lieu, quels que soient les allongements des barres, peuvent être différentiées par rapport aux α_i, ce qui donne

$$(\gamma) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sum_s k_i \, \delta\alpha_i \cos\lambda_i &= 0, \\ \sum_s k_i \, \delta\alpha_i \cos\mu_i &= 0, \\ \sum_s k_i \, \delta\alpha_i \cos\nu_i &= 0. \end{aligned} \right.$$

Si n est le nombre des nœuds, ces équations au nombre de $3n-6$, permettent d'éliminer $3n-6$ des quantités $k_i\delta\alpha_i$ qui existent dans (β). Ces quantités, s'il y a k barres surabondantes,

étant au nombre de $m = 3n - 6 + k$, il en restera k indépendantes. Si l'on égale leurs coefficients à zéro, on aura donc k relations linéaires et *purement géométriques* entre les allongements α_i. Ce sont précisément les équations (9) du § 4.

Méthode de Mohr. — On peut aussi obtenir ces équations en appliquant le principe du travail virtuel comme nous l'avons fait plus haut. Cette ingénieuse application du principe est due à Mohr (*Journal des ingénieurs et architectes de Hanovre*, 1875).

Soient toujours

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \ldots,\quad a_m$$

les m barres d'un système absolument quelconque, k de ces barres étant surabondantes.

Désignons par

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \ldots,\quad a_{m-k}$$

$m - k$ barres formant un système sans lignes surabondantes, et que nous supposerons (écartant les cas d'exception discutés dans la note suivante) librement dilatable.

Parmi les barres du système, nous regardons donc comme surabondantes celles dont les longueurs sont désignées par les lettres

$$a_{m-k+1},\quad a_{m-k+2},\quad \ldots,\quad a_m.$$

Chacune de ces longueurs est déterminée en fonction des $m - k$ barres du système librement dilatable, de sorte que les k équations (7) du § 4 peuvent toujours être résolues et mises sous la forme

$$(10_a)\qquad \left\{\begin{aligned} a_{m-k+1} &= f_1(a_1, a_2, \ldots, a_{m+k}),\\ a_{m-k+2} &= f_2(a_1, a_2, \ldots, a_{m+k}),\\ a_{m-k+3} &= f_3(a_1, a_2, \ldots, a_{m+k}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ a_m &= f_k(a_1, a_2, \ldots, a_{m+k}).\end{aligned}\right.$$

On en déduit entre les allongements élastiques les k suivantes

$$(10_b)\qquad \alpha_{m-k+s} = \frac{\partial f_s}{\partial a_1}\alpha_1 + \frac{\partial f_s}{\partial a_2}\alpha_2 + \ldots + \frac{\partial f_s}{\partial a_m}\alpha_{m-k},$$

où l'on remplacera successivement l'indice s par 1, 2, 3, ..., k.

Ce sont ces équations qu'il s'agit de trouver.

Elles sont vraies quels que soient les allongements supposés infiniment petits

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \alpha_3, \quad \ldots, \quad \alpha_{m-k}.$$

Car, quels que soient ces allongements, celui a_{m-k+s} de chaque barre surabondante s'ensuit.

Ceci étant, concevons qu'on supprime toutes les forces (directement appliquées ou réactions d'appuis) agissant sur le système; supprimons aussi toutes les barres surabondantes et aux deux extrémités de l'une quelconque d'entre elles, celle a_{m-k+s}, appliquons deux forces dirigées suivant cette ligne, égales entre elles, de sens opposés et répulsives. Soit P la valeur commune de ces forces.

Le système (privé de toutes les barres surabondantes, par conséquent strictement défini de forme) sera en équilibre sous l'action de ces deux forces et, dans ses diverses barres, il naîtra des tensions parfaitement déterminées et qu'on pourra obtenir par la Statique.

Si le système privé des barres surabondantes est simplement triangulé, on les obtiendra graphiquement; mais, quel qu'il soit, on pourra les obtenir soit graphiquement, soit analytiquement par les seules équations de la Statique.

Soient

$$t_{1}^{\overline{m-k+s}}, \quad t_{2}^{\overline{m-k+s}}, \quad \ldots, \quad t_{m-k}^{\overline{m-k+s}}$$

ces forces ainsi connues. La lettre $t_{i}^{\overline{m-k+s}}$ représente donc l'action que deux forces répulsives égales et opposées, d'une valeur arbitrairement choisie une fois pour toutes, P, appliquées aux extrémités de la ligne a^{m-k+s}, exercent sur la barre a^{i}.

Le système étant librement dilatable, puisque nous avons supposé qu'on supprime toutes les barres surabondantes, nous pouvons donner aux $m-k$ barres qui le composent des dilatations virtuelles entièrement arbitraires.

Soient

$$\delta a_1, \quad \delta a_2, \quad \ldots, \quad \delta a_{m-k}$$

de telles dilatations.

La barre surabondante a_{m-k+s} prendra alors une dilatation

δa_{m-k+s} déterminée par l'équation (10_b), où l'on remplace les allongements élastiques par les allongements virtuels, en sorte que

$$(10_c) \qquad \delta a_{m-k+s} = \frac{\partial f}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2}\delta a_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial a_m}\delta a_m.$$

Mais, si nous appliquons le principe du travail virtuel, nous aurons

$$\mathrm{P}\,\delta a_{m-k+s} - t_{1}^{\overline{m-k+s}}\,\delta a_1 - t_{2}^{\overline{m-k+s}}\,\delta a_2 - \ldots - t_{m-k}^{\overline{m-k+s}}\,\delta a_m = 0$$

ou

$$(10_d) \qquad \delta a_{m-k+s} = \frac{t_{1}^{\overline{m-k+s}}}{\mathrm{P}}\delta a_1 + \frac{t_{2}^{\overline{m-k+s}}}{\mathrm{P}}\delta a_2 + \ldots + \frac{t_{m-k}^{\overline{m-k+s}}}{\mathrm{P}}\delta a_m.$$

Les équations (10_c) et (10_d), devant avoir lieu, quels que soient les allongements virtuels qui entrent dans les seconds membres, sont identiques.

Par suite,

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = \frac{t_{1}^{\overline{m-k+s}}}{\mathrm{P}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial a_2} = \frac{t_{2}^{\overline{m-k+s}}}{\mathrm{P}}, \qquad \ldots.$$

Mais les rapports $\dfrac{t_{1}^{\overline{m-k+s}}}{\mathrm{P}}$, $\dfrac{t_{2}^{\overline{m-k+s}}}{\mathrm{P}}$, ... sont des grandeurs purement numériques, indépendantes de toutes les unités et ne dépendant que de la forme géométrique de la figure. Appelons-les

$$\lambda_{1}^{\overline{m-k+s}}, \quad \lambda_{2}^{\overline{m-k+s}}, \quad \ldots.$$

Ce sont les valeurs des $t_{1}^{\overline{m-k+s}}$, $t_{2}^{\overline{m-k+s}}$, ..., lorsque $\mathrm{P} = 1$. Ce sont donc les tensions que deux forces répulsives égales à l'unité appliquées aux deux extrémités de la barre surabondante a^{m-k+s} (supposée enlevée ainsi que toutes les autres barres surabondantes) produisent sur les barres restantes.

On a donc

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = \lambda_{1}^{\overline{m-k+s}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial a_2} = \lambda_{2}^{\overline{m-k+s}}, \qquad \ldots.$$

Par suite l'équation (10_b) que l'on cherche devient

$$(10_c) \qquad \alpha_{m-k+s} = \lambda_{1}^{\overline{m-k+s}}\alpha_1 + \lambda_{2}^{\overline{m-k+s}}\alpha_2 + \ldots + \lambda_{m-k}^{\overline{m-k+s}}\alpha_{m-k}.$$

En faisant $\alpha = 1, 2, 3, \ldots, k$, c'est-à-dire en opérant de même pour chaque barre surabondante, on a les k équations cherchées; par suite, les équations complémentaires entre les tensions que prend le système *réel* (avec ses barres surabondantes) sous l'action des forces qui le sollicitent, à adjoindre à celles fournies par la Statique, sont

$$(10_f)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{t^{m-k+s} a_{m-k+s}}{E_{m-k+s} S_{m-k+s}} \\ &\quad = \frac{\lambda^{\frac{m-k+s}{1}} a_1}{E_1 S_1} t_1 + \frac{\lambda^{\frac{m-k+s}{2}} a_2}{E_2 S_2} t^2 + \ldots + \frac{\lambda^{\frac{m-k+s}{m-k}} a_{m-k}}{E_{m-k} S_{m-k}} t_{m-k}, \end{aligned} \right.$$

où l'on doit faire $s = 1, 2, 3, 4, \ldots, k$.

De là, la règle suivante :

Théorème. — *Étant donné un système quelconque à k barres surabondantes en équilibre sous l'action de forces quelconques :*

1° *Supprimez ces forces.*

2° *Supprimez les barres surabondantes. Il arrivera alors (sauf les cas d'exception ci-après discutés) que le système devient librement dilatable.*

3° *Appliquez aux deux extrémités de la ligne géométrique suivant laquelle était dirigée une des barres surabondantes* a_{m-k+s} *deux forces répulsives de grandeur quelconque* P (*on prendra un nombre simple d'unités de force*).

4° *Cherchez, ce qui se fait par la Statique, les tensions qui en résultent dans les barres conservées.*

5° *Divisez ces tensions positives ou négatives par* P, *vous aurez des nombres sans dimensions*

$$\lambda^{\frac{m-k+s}{1}},\ \lambda^{\frac{m-k+s}{2}},\ \ldots,\ \lambda^{\frac{m-k+s}{m-k}}.$$

Ce sont ceux qui entrent dans l'équation (10_e), qui exprime l'allongement de la barre a_{m-k+s}, et dans l'équation (10_f) correspondante.

6° *Faites l'opération* 5° *successivement pour chacune des lignes* a_{m-k+s} *suivant lesquelles étaient placées les barres surabondantes, vous aurez toutes les équations* (10_f).

Remarque. — Si le système dépourvu de ses barres surabondantes est réticulaire, les $\lambda^{\frac{m-k+s}{i}}$ se trouvent graphiquement et, par suite, aussi les équations (10_f). C'est dans ce cas surtout que l'ingénieuse méthode qui précède, et qui est due à Mohr, est plus avantageuse que l'étude purement géométrique de la figure.

§ 6_c.

APPLICATION AUX CROIX DE SAINT-ANDRÉ. — Soit (*fig. d*, p. 224) une poutre à croix de Saint-André. Considérons comme surabondantes les barres diagonales pointillées et supprimons-les ainsi que toutes les autres forces agissantes.

Cherchons l'allongement d'une des barres supprimées AB en fonction des allongements des barres conservées. Appelons 1, 1'; 2, 2'; 3, 3' les numéros des barres du panneau ABCD; α_1, α'_1; α_2, α'_2; α_3, α'_3 leurs allongements et soient $CB = a$, $AC = h$, $CD = AB = c = \sqrt{a^2 + h^2}$. Nous devons appliquer aux deux extrémités de AB deux forces égales à l'unité et opposées et chercher les actions qui en résultent sur toutes les barres conservées.

Comme ces barres appartiennent à un système réticulaire, le théorème de Ritter (§ 204) les fournit.

On voit d'abord qu'il n'y a que les cinq barres du panneau ABCD qui supporteront des tensions : aucune des autres barres de la poutre privée des barres pointillées n'est tendue.

Le théorème de Ritter donne

$$\lambda^{\frac{1}{1}} = \frac{M}{h},$$

où M est le moment de flexion de la force $P = 1$ relativement au sommet D opposé à la barre 1, et où $h = -AC$, puisque D est au-dessous de la barre 1 (§ 205).

Comme

$$M = -\frac{a \times AC}{c},$$

on aura

$$\lambda^{\frac{3'}{1}} = \frac{a}{c},$$

et de même

$$\lambda^{\frac{3'}{1'}} = \frac{a}{c},$$

Puis, pour les efforts tranchants,

$$\lambda^{\frac{3'}{2}} = \lambda^{\frac{3'}{2'}} = \frac{h}{c}$$

$$\lambda^{\frac{3'}{3}} = 1;$$

donc

$$\alpha_{3'} = \lambda^{\frac{3'}{1}}\alpha_1 + \lambda^{\frac{3'}{1'}}\alpha_{1'} + \lambda^{\frac{3'}{2}}\alpha_2 + \lambda^{\frac{3'}{2'}}\alpha_{2'} + \lambda^{\frac{3'}{3}}\alpha_3$$

ou

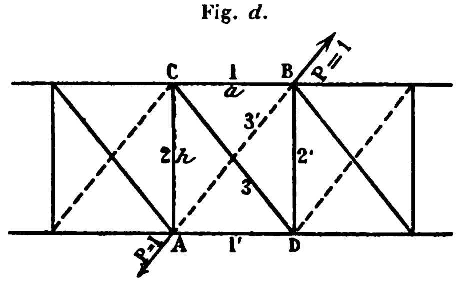
$$\alpha_{3'} = \frac{a}{c}(\alpha_1 + \alpha_{1'}) + \frac{h}{c}(\alpha_2 + \alpha_{2'}) - \alpha_{3'},$$

ou

$$c(\alpha_3 + \alpha_{3'}) = a(\alpha_1 + \alpha_{1'}) + h(\alpha_2 + \alpha_{2'}),$$

qui, aux notations près, coïncide avec la formule (15_1) du § 6_a déduite directement de la forme de la figure.

Fig. *d*.



§ 6_d.

DÉPLACEMENTS DES POINTS D'UN SYSTÈME LIBREMENT DILATABLE EN FONCTION DES ALLONGEMENTS DES BARRES. —Considérons à présent un système qui ne contienne pas de lignes surabondantes. Soit m le nombre de ses barres. Appelons a_i l'une quelconque d'entre elles, α_i son allongement.

Soient A et B deux nœuds quelconques du système non réunis par une barre. Appelons a_j la longueur AB et α_j l'allongement que subit cette ligne, par suite des allongements α_i des barres du système. Pour obtenir α_j il suffit, aux points A et B, d'appliquer

deux forces répulsives égales à l'unité et de déterminer, par la Statique, les tensions qui en résultent dans les m barres du système. Appelons λ_i la tension ainsi produite sur la barre a_i. On aura

$$\alpha_j = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_m \alpha_m$$

ou

$$\text{(A)} \qquad \alpha_j = \sum_i \lambda_i \alpha_i,$$

la sommation s'étendant à toutes les barres du système.

S'il s'agit d'un système réticulaire, on voit tout de suite que les longueurs λ_i sont nulles sur toutes les barres autres que celles comprises entre les points A et B, de sorte que l'équation (A) équivaut à celle

$$\text{(A')} \qquad \alpha_j = \sum_{A}^{B} \lambda_i \alpha,$$

qui coïncide avec celle établie pour les systèmes réticulaires au Chapitre VI.

Supposons le point B fixe, ou plus généralement assujetti à rester sur une courbe normale à la ligne BA. Alors la force 1 appliquée en B est détruite par la réaction de l'obstacle. Il suffit donc d'appliquer la force 1 en A et de chercher les tensions λ_i correspondantes, que nous appellerons, dans ce cas, $\overset{A}{\lambda^i}$. De plus, l'allongement α_j de la ligne AB se réduit au déplacement de A estimé suivant cette ligne.

Donc la formule (A) donne, dans ce cas, la projection du déplacement du nœud A sur la direction de la droite AB allant vers un nœud B assujetti à rester fixe ou à se déplacer normalement à cette direction.

Or si, ce qui arrive toujours, le système est déterminé de position, c'est-à-dire s'il a au moins un point fixe et un autre assujetti à demeurer sur une ligne donnée et, à plus forte raison, s'il a plus de sujétions, on peut toujours, A étant un nœud quelconque et AB une direction quelconque, prendre sur cette direction un point B, le joindre au point fixe du système par une barre et au point assujetti à demeurer sur une ligne donnée ou à un second

point fixe, s'il existe, par une seconde barre. Dans ce dernier cas, le point B est fixe; dans le premier, il peut être choisi de façon à se déplacer, en vertu des sujétions du système, sur une perpendiculaire à AB.

D'ailleurs, on a ajouté au système un nœud fictif B et deux barres, ce qui ne l'empêche pas de rester librement dilatable s'il l'était avant cette adjonction.

Donc la formule (A) appliquée au système entier (le système réel et celui des deux barres additionnelles) *donne le déplacement d'un nœud quelconque estimé suivant une direction quelconque,* produit par des allongements donnés de ses barres.

Dans le cas des systèmes réticulaires, la formule (A') jouit de la même propriété. Les termes provenant des barres additionnelles équivalent à ceux qui sont en dehors des signes Σ dans les formules du Chapitre VI.

§ 6$_c$.

PRINCIPE DE RÉCIPROCITÉ DES DÉPLACEMENTS. — THÉORÈME. — *Si, sous l'action d'une force* 1 *agissant dans une direction arbitraire, en un nœud quelconque* A *d'un système librement dilatable déterminé de position, un autre nœud quelconque* C *prend un déplacement qui, estimé dans une direction aussi arbitrairement choisie, est* $u^{\overset{A}{\overline{C}}}$, *réciproquement, une force* 1 *appliquée au point* C *dans cette dernière direction, imprime au point* A *un déplacement qui, estimé suivant la première direction, est aussi* $u^{\overset{A}{\overline{C}}}$, *de sorte que, si l'on appelle ce second déplacement* $u^{\overset{C}{\overline{A}}}$, *on a*

$$u^{\overset{A}{\overline{C}}} = u^{\overset{C}{\overline{A}}}.$$

En effet, appelant $\lambda^{\overset{A}{\overline{i}}}$ les tensions que la force 1, appliquée en A dans la première direction choisie, produit sur la barre a_i, et $\lambda^{\overset{C}{\overline{i}}}$ celle que la force 1 appliquée en C dans la seconde direction aussi arbitraire détermine dans la même barre, appliquons la force 1

en A. L'allongement α_i qu'elle produit sur une barre a_i est

$$\alpha_i = \frac{a_i}{E_i S_i} \overset{A}{\lambda^{\bar{i}}} = K_i \overset{A}{\lambda^{\bar{i}}},$$

en appelant, pour abréger, K_i le rapport $\frac{a_i}{E_i S_i}$ relatif aux dimensions et à l'élasticité de la barre A_i.

Pour avoir le déplacement du point C dans une direction arbitraire CB (la seconde direction considérée), il faut, en appliquant la formule (A), se représenter CB comme la barre a_j et regarder le déplacement $\overset{C}{u^{\bar{A}}}$ comme égal à α_j.

Les $\overset{j}{\lambda^{\bar{i}}}$ sont les tensions produites par les forces 1 appliquées suivant cette barre fictive CB ou simplement au point C.

Donc, dans la formule (A), on devra faire

$$\alpha_j = \overset{C}{u^{A}},$$
$$\overset{j}{\lambda^{\bar{i}}} = \overset{C}{\lambda^{\bar{i}}},$$
$$\alpha_i = K_i \overset{A}{\lambda^{\bar{i}}},$$

d'où

$$\overset{C}{u^{\bar{A}}} = \sum_i K_i \overset{A}{\lambda^{\bar{i}}} \times \overset{C}{\lambda^{\bar{i}}}.$$

On trouverait, par le même raisonnement, pour $\overset{A}{u^{\bar{C}}}$ la même expression; car elle est symétrique par rapport aux deux points A et C.

Comme application de ce théorème, considérons un arc libre et librement dilatable (qu'il soit d'ailleurs réticulaire ou non). Supposons-le posé sur deux tourillons A et A'. Le point A étant fixe, rendons l'arc libre en A' et appliquons en ce point A', suivant la corde AA', une force qui allonge cette corde.

Cherchons, une fois pour toutes, la déformation que l'arc subit sous l'action de cette force. Pour cela, on cherchera (par la construction d'une figure réciproque) les tensions $\overset{C}{\lambda^{\bar{i}}}$ que cette force 1 appliquée suivant la corde produit sur les différentes barres. On déduit de ces tensions les allongements correspon-

dants

$$\alpha_l = \frac{a_l}{E_l S_l} \lambda^{\frac{C}{l}},$$

et de ces allongements, les déplacements verticaux des nœuds par la formule (A); puis, si on le veut, ses déplacements horizontaux.

Soit v_α le déplacement vertical du nœud n° α. Le déplacement horizontal, on ne le cherchera que pour le point A. Soit Δc ce déplacement, c'est-à-dire l'allongement de la corde pour la force 1 appliquée en A'.

Cela étant, on demande de trouver la poussée q_α due au poids 1 appliqué au nœud n° α.

Le poids 1 appliqué au nœud n° α produit sur la corde un allongement égal au déplacement vertical v_α que le poids 1 placé suivant AA' produit sur le nœud.

D'autre part, une poussée 1 appliquée en A' produit un raccourcissement Δc. Donc la poussée q_α produit un raccourcissement

$$\Delta c \times q_\alpha.$$

Par suite, le déplacement total du point A' sous l'action du poids 1 et de la poussée est

$$v_\alpha - \Delta c \times q_\alpha.$$

Pour que le point A' reste fixe, il faut que

$$v_\alpha - \Delta c \times q_\alpha = 0;$$

d'où, pour la poussée cherchée,

$$q_\alpha = \frac{v_\alpha}{\Delta c}.$$

Le dénominateur est invariable, quelle que soit la position du poids. Ainsi :

La poussée produite dans un arc simplement posé sur appuis (l'arc étant réticulaire ou non, mais librement dilatable si l'on supprime ses appuis) par un poids appliqué en l'un quelconque de ses nœuds est proportionnelle à l'abaissement vertical v_α que deux forces 1 égales et opposées, appliquées suivant sa corde, produisent sur son point d'application. Elle est égale

au quotient de cet abaissement par l'allongement que la corde subit sous l'action de cette même force.

§ 6_f.

LIGNE DE POUSSÉE POUR UN ARC LIBREMENT DILATABLE APPUYÉ OU ENCASTRÉ. — Si l'on construit un polygone dont les sommets situés sur les verticales des nœuds aient pour ordonnées, à partir de la corde de l'arc, des longueurs proportionnelles à v_α, cette ligne sera ce que nous avons appelé précédemment (IIIe Partie) la *ligne de poussée*.

On peut toujours déterminer v_α comme nous venons de le dire et, par suite, la ligne de poussée. Connaissant cette ligne, on peut trouver la poussée de l'arc pour n'importe quelle charge, à l'aide du principe de superposition.

Ayant la poussée de l'arc, on peut l'introduire avec les forces connues et étudier alors l'arc comme une simple poutre posée sur appuis simples ou avec encastrements suivant que l'arc lui-même est posé sur tourillons simples ou encastré.

§ 6_g.

LIGNE DE POUSSÉE POUR UN ARC RÉTICULAIRE. — Pour un arc réticulaire, la formule générale (A) ou celle (E″) du § 622 donnent

$$v_\alpha = \sum_g \frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{ES}h^2}(x - x_\alpha),$$

en supprimant les accents, appelant x_α l'abscisse du point d'application de la charge et $\sum_g$ une force relative aux barres placées à sa gauche.

La somme se rapporte à toutes les abscisses x des nœuds opposés à ces barres.

Le moment de flexion M vient ici de deux forces égales à 1, appliquées aux extrémités de la corde.

Donc le moment relatif à un nœud dont les ordonnées sont x

et y est

$$M = y,$$

et, par suite,

$$v_\alpha = \sum_g \frac{a}{ESh^2} y(x - x_\alpha).$$

Si l'on suppose appliquées à tous les nœuds des charges verticales fictives

$$\frac{ay}{ESh^2},$$

le déplacement v_α cherché pour un nœud α est donc la somme des moments, relativement à ce nœud, de celles de ces charges placées à sa gauche.

On peut encore dire que c'est le moment de flexion que ces charges fictives produisent en ce point.

Donc la ligne de poussée est un polygone funiculaire de ces charges. Or, si l'arc pose sur tourillons simples, ce polygone passe par les appuis.

Nous arrivons ainsi à un résultat indiqué au § 430, IIIe Partie. Il serait aisé d'étendre cette démonstration aux arcs encastrés.

III.

Propriétés générales des systèmes d'égale résistance.

§ 7.

On a, pour l'établissement de toutes les grandes charpentes, à résoudre le problème suivant : déterminer les sections S_i d'un système de barres soumis à des forces données, de façon : 1° que, si toutes les barres sont composées de la même matière, leur tension par unité de surface $\frac{t_i}{S_i}$ soit la même dans toutes les barres tendues, et leur pression par unité de surface, la même dans toutes les barres comprimées; 2° que si les barres sont composées de matières différentes, la tension par unité de surface et par unité du coefficient d'élasticité $\frac{t_i}{E_i S_i}$ soit la même pour toutes les barres tendues, et la compression par unité de surface et par unité

du coefficient d'élasticité, la même dans toutes les barres comprimées.

Ainsi, si R′ et R″ sont deux nombres positifs qu'on se donne d'après la nature de la matière employée et qui sont égaux si l'on regarde la matière comme résistant également bien à l'extension et à la compression, on devra avoir, pour toutes les barres tendues,

$$\frac{t_i}{E_i S_i} = R', \tag{11}$$

et, pour les barres comprimées,

$$\frac{-t_i}{E_i S_i} = R'', \tag{11 bis}$$

en regardant les compressions comme des tensions négatives.

Si m est, comme précédemment, le nombre des barres, le nombre total des inconnues est ici $2m$, à savoir m tensions t_i et m sections S_i. Le nombre des équations à satisfaire est aussi de $2m$, à savoir les m équations qui existent entre les tensions t_i et les forces extérieures, équations que nous savons trouver; 2° les équations (11) et (11 *bis*) également au nombre de m, puisqu'il y en a une et une seule applicable à chaque barre. Il semble donc que le problème doive, en général, être possible et déterminé. Nous allons voir pourtant qu'il n'en est pas ainsi. Le problème est possible et déterminé toutes les fois que la Statique seule suffit à trouver les tensions des barres; car, dans ce cas, les m équations qui ont lieu entre ces tensions sont indépendantes des sections S_i; elles peuvent donc être résolues séparément; ces équations, par leur nature même, ne sauraient d'ailleurs être ni incompatibles ni indéterminées, puisque nous admettons que les conditions d'équilibre entre les forces extérieures agissant sur le système sont remplies. On connaîtra donc les tensions positives ou négatives de toutes les barres; et en portant les valeurs des premières dans l'équation (11) et les valeurs des dernières dans l'équation (11 *bis*), on obtiendra les sections S_i des barres. Les équations (11) et (11 *bis*) fourniront d'ailleurs, comme cela doit être, pour toutes les inconnues S_i, des valeurs positives, puisque E_i, R′ et R″ sont des nombres positifs et qu'on devra recourir à l'équation (11) ou à l'équation (11 *bis*) selon que t_i sera positif ou négatif.

Les choses se passeront tout autrement lorsque le système auquel on a affaire contient un certain nombre k de lignes surabondantes et que, par suite, en vertu du théorème III du § 3, la Statique ne fournira, entre les m tensions des barres, que $m - k$ équations. Les k autres équations, fournies alors par la théorie mathématique de l'élasticité, sont celles (9) du § 4, c'est-à-dire

$$(12) \qquad \frac{dF}{da_1} a_1 \frac{t_1}{E_1 S_1} + \frac{dF}{da_2} a_2 \frac{t_2}{E_2 S_2} + \ldots + \frac{dF}{da_m} a_m \frac{t_m}{E_m S_m} = 0.$$

Elles ne contiennent donc les $2m$ inconnues t_i et S_i que par les m rapports $\frac{t_i}{S_i}$; les m équations (11) et (11 *bis*) ne les contiennent aussi que sous cette forme; donc, entre ces m rapports $\frac{t_i}{S_i}$, on aura $m + k$ équations; ces équations seront donc incompatibles, sauf dans les cas exceptionnels où elles se réduisent à m. Si cela a lieu, on n'aura plus à satisfaire qu'à ces m équations et à celles, au nombre de $m - k$, fournies par la Statique, soit en tout à $2m - k$ équations; et, comme on dispose de $2m$ inconnues, le problème présentera une k^{uple} indétermination. Ainsi :

Théorème IV. — *Pour qu'un système de barres en équilibre sous l'action de forces données puisse être édifié en solide d'égale résistance, il faut et il suffit,* en général, *qu'il ne contienne aucune ligne surabondante.*

Dans le cas exceptionnel où un système contenant des lignes surabondantes peut devenir d'égale résistance, il le peut d'une infinité de manières, c'est-à-dire qu'on peut, d'une infinité de manières, modifier les sections de ses barres sans qu'il cesse d'être d'égale résistance.

§ 8.

Maintenant si l'on veut avoir les conditions auxquelles doit satisfaire un système de barres, pour se trouver dans le cas exceptionnel de pouvoir devenir d'égale résistance, à l'égard d'un système de forces données agissant sur lui, il faut porter dans les k équations (12) les valeurs (11) ou (11 *bis*) des $\frac{t_i}{S_i}$, à savoir : les valeurs (11) pour les barres tendues et celles (11 *bis*) pour les

barres comprimées. Affectons, dans ce qui va suivre, l'indice i à l'une quelconque des barres tendues, et l'indice j à l'une quelconque des barres comprimées; alors, en portant les valeurs (11) ou (11 *bis*) dans les k équations (12), les k équations de condition qui en résulteront pourront se mettre sous la forme suivante :

$$(13)\qquad R'\Sigma\frac{dF}{da_i}a_i - R''\Sigma\frac{dF}{da_j}a_j = 0,$$

le premier Σ se rapportant à toutes les barres tendues, le second à toutes les barres comprimées.

Mais rien n'indique à l'avance quelles sont les barres qui se trouvent dans le premier ou dans le second de ces deux cas. Si l'on imagine toutes les combinaisons qu'il est possible de faire sur la répartition entre les barres tendues et celles comprimées, chacune de ces combinaisons donnera lieu à un système particulier d'équations (13), et pour que le problème de la résistance égale soit possible d'une manière, et par suite d'une infinité de manières, il *faut* (nous verrons bientôt que cela ne suffit pas toujours) que l'un au moins de ces systèmes d'équations se trouve satisfait de lui-même.

Le nombre de ces systèmes, dont l'un au moins doit être ainsi identique, est de 2^{m-k}. En effet, on ne peut se donner arbitrairement les signes des tensions que de $m - k$ barres; car les m équations (12) déterminent alors elles-mêmes les signes des autres. Or si, pour $m - k$ barres, le nombre des combinaisons entre les barres tendues et celles comprimées est A, il est 2A pour $m - k + 1$ barres; car la barre que l'on ajoute peut être supposée successivement tendue ou pressée, et chacune de ces deux hypothèses donnera lieu à A combinaisons. Or, pour $m - k = 1$, on a évidemment $A = 2$; donc, pour $m - k = 2$, on a $A = 2^2$; pour $m - k = 3$, $A = 2^3$, et ainsi de suite. On a donc bien 2^{m-k} systèmes d'équations, et, pour que l'égale résistance soit possible, il est *nécessaire* que l'un au moins de ces systèmes soit identique.

Mais cette condition ou plutôt ces k conditions, puisque chaque système comporte k équations, ne sont pas toujours suffisantes pour que les barres données puissent recevoir des sections qui assurent leur égale résistance sous l'action d'un système de forces *donné*. En effet, supposons que, parmi les 2^{m-k} systèmes d'é-

quations (13), un ou plusieurs soient identiques, et prenons l'un d'eux que nous appellerons (A); par cela même que nous connaissons ce système (A), nous savons quelles hypothèses il a fallu faire sur les signes des tensions des barres pour qu'il soit satisfait; on connaît donc tous ces signes, et le problème à résoudre consiste à trouver les m tensions t_i et les m sections S_i par les conditions suivantes : 1° que les tensions t_i aient toutes des signes déterminés et connus d'avance; 2° qu'elles satisfassent aux équations (11) pour les barres tendues, et à celles (11 *bis*) pour les barres pressées, ainsi qu'aux $m-k$ équations de la Statique, soit en tout à $2m-k$ équations. Le nombre des inconnues étant $2m$, k inconnues, par exemple, k des sections S_i sont indéterminées; cependant elles ne sont pas tout à fait arbitraires : elles doivent être choisies de façon que les signes des tensions soient ce qu'ils doivent être en vertu de la condition 1°; et il n'en serait pas ainsi si on les prenait au hasard. Donnons, en effet, à k sections des valeurs arbitrairement choisies; au moyen des équations (11) ou (11 *bis*), on déterminera les tensions correspondantes, et il n'y a aucune ambiguïté sur celle des équations (11) ou (11 *bis*) qu'il faut employer pour chaque barre, les signes des tensions des barres étant connus. On aura donc déterminé ainsi les tensions de k barres, et ces tensions auront les signes qu'elles doivent avoir

On portera les valeurs trouvées pour ces k tensions dans les $m-k$ équations de la Statique, et ces équations fourniront pour les $m-k$ tensions restantes des valeurs déterminées; mais, si l'on a pris au hasard les sections des k premières barres, ce qui revient à dire que, sauf leurs signes qu'on a respectés, on a pris les valeurs absolues des tensions de k barres arbitrairement, les valeurs que l'on trouvera pour les tensions des $m-k$ autres barres n'auront pas, en général, les signes spécifiés par les conditions 1°. On voit donc qu'on ne pourra pas prendre au hasard les sections, ou, si l'on veut, les valeurs absolues des tensions des k barres surabondantes; si ces valeurs sont indéterminées : 1° leurs signes sont déterminés; 2° leurs valeurs absolues doivent varier entre les limites telles que les $m-k$ tensions restantes aient aussi les signes qui leur conviennent.

Ces limites sont d'après cela faciles à définir. En effet, les $m-k$ équations de la Statique fournissent les tensions t_i de $m-k$

barres au moyen des tensions t_{m-k+i} des k autres, par des expressions linéaires de la forme

$$(14)\qquad t_i = C_0 + C_1 t_{m-k+1} + C_2 t_{m-k+2} + \ldots + C_k t_m,$$

où les coefficients C_i dépendent et de la forme géométrique de la figure formée par les barres et des forces extérieures qui les maintiennent en équilibre ([1]).

Chacune des $m-k$ tensions t_i devant avoir un signe déterminé, les k tensions t_{m-k+i} doivent satisfaire à $m-k$ conditions de la forme

$$(15)\qquad C_0 + C_1 t_{m-k+1} + C_2 t_{m-k+2} + \ldots + C_k t_m \gtrless 0,$$

auxquelles on doit ajouter, puisqu'on connaît les signes de toutes les tensions t_{m-k+i}, k inégalités de la forme

$$(15\ bis)\qquad t_{m-k+i} \lesseqgtr 0,$$

soit en tout m conditions d'inégalité entre k indéterminées, k étant nécessairement plus petit que m.

Ainsi :

Théorème V. — *Pour qu'un système de m barres à k lignes surabondantes puisse, d'une manière, et par suite d'une infinité de manières, être constitué en système d'égale résistance à l'égard de forces données le maintenant en équilibre, il faut qu'il satisfasse : 1° à k conditions d'égalité; 2° à m conditions d'inégalité.*

§ 9.

On peut présenter la théorie des systèmes d'égale résistance sous une forme un peu différente et qui fait bien ressortir la signification géométrique des conditions d'égalité dont il s'agit.

Soit t_i la tension positive ou négative d'une barre de section S_i, au coefficient d'élasticité E_i, et soit α_i son allongement positif ou

---

([1]) Il n'y a même que les coefficients C_0 qui dépendent des forces extérieures; les autres C_1, C_2, ... ne dépendent que de la forme géométrique de la figure.

négatif; on a

$$(16) \qquad \alpha_i = a_i \frac{t_i}{E_i S_i}.$$

Si l'on introduit dans cette équation les conditions d'égale résistance (11) ou (11 *bis*), ces conditions deviendront

$$(17) \qquad \alpha_i = a_i R'$$

pour les barres tendues, et

$$(17\ bis) \qquad \alpha_i = - a_i R''$$

pour les barres comprimées. Ainsi le problème de la recherche d'un système d'égale résistance consiste à déterminer les sections S_i d'un système de barres élastiques, de façon que, sous l'action de forces données le maintenant en équilibre, toutes les barres qui s'allongent s'allongent de la quantité donnée $a_i R'$, et toutes celles qui se raccourcissent se raccourcissent aussi de la quantité donnée $a_i R''$.

Si la Statique suffit à déterminer les tensions des barres, on sait quelles sont celles qui s'allongent et celles qui se raccourcissent; on connaît donc d'avance les longueurs que devront prendre toutes les barres après la déformation élastique. Or, quelles que soient ces longueurs, la figure déformée pourra, sauf les cas d'exception qui font l'objet de la Note suivante, être construite, puisque, dans ce cas, elle ne contient (théorème I) aucune ligne surabondante; on pourra donc toujours déterminer les sections des barres, de façon que, sous l'action des tensions *connues* qu'elles subissent, elles prennent l'allongement voulu. Mais, si une figure à m barres contient k lignes surabondantes, alors, si l'on sait d'avance quelles sont les barres qui s'allongent et quelles sont celles qui se raccourcissent, ou si on le savait seulement pour $m - k$ barres, on connaîtrait les longueurs que devraient avoir ces barres après la déformation de la figure, et, par suite, on connaîtrait la forme que devrait prendre la figure déformée; car dire qu'une figure à m lignes contient k lignes surabondantes équivaut à dire que la forme de la figure est définie par la connaissance des longueurs de $m - k$ de ses côtés.

Mais, comme on ne sait pas ici d'avance quelles sont les barres

qui s'allongent ou se raccourcissent, la Statique fournissant k équations de trop peu pour définir les tensions des barres, on peut faire, sur les signes des allongements et des raccourcissements des barres, un nombre fini 2^{m-k} d'hypothèses; il en résulte 2^{m-k} figures différentes que l'on peut construire en se donnant, conformément aux conditions (11) ou (11 *bis*), les allongements ou les raccourcissements de $m - k$ de leurs côtés; et pour que le problème de l'égale résistance soit possible, il faut que l'une au moins de ces figures soit telle, qu'en y traçant les k autres lignes (celles dont on ne s'est pas donné d'avance les allongements), les allongements de ces lignes soient aussi $a_i R'$ quand ils sont positifs, et $-a_i R''$ quand ils sont négatifs. C'est ce qui, en général, n'aura pas lieu; pour que cela ait lieu, il faut que la figure formée par les barres satisfasse à k conditions; ce sont précisément ces conditions qu'expriment les équations (13). On voit qu'elles sont purement géométriques. Si elles sont remplies, c'est-à-dire si une ou plusieurs des 2^{m-k} figures déformées peuvent être construites en admettant que toutes les barres se soient allongées ou raccourcies conformément aux conditions (17) ou (17 *bis*), la connaissance même de chacune de ces figures donne les signes des tensions de toutes les barres; il faut alors déterminer leurs valeurs absolues, de façon à satisfaire aux $m - k$ équations de la Statique, tout en respectant leurs signes connus d'avance, ce qui donne lieu aux m conditions d'inégalité spécifiées au théorème V.

§ 10.

Ces conditions d'inégalité, il faudrait bien se garder de les négliger ou de les regarder comme secondaires; elles indiquent souvent l'impossibilité du problème de l'égale résistance, alors même que les conditions d'égalité (13) sont satisfaites. En voici un exemple remarquable :

Supposons un système de m barres à k lignes surabondantes, libre ou assujetti, dans ses déplacements, à des conditions n'influant que sur sa position et non sur sa forme, cette forme étant d'ailleurs quelconque. Parmi les 2^{m-k} manières dont on peut concevoir cette figure déformée en supposant que toutes ses lignes a_i s'allongent de $a_i R'$ ou de $-a_i R''$, il y en a deux qui sont toujours

possibles : ce sont celles qu'on obtient en supposant que *toutes* les barres s'allongent ou que *toutes* se raccourcissent; car, si toutes les barres s'allongent, on obtient leurs nouvelles longueurs en multipliant leurs longueurs primitives par le rapport constant $1 + R'$; si toutes se raccourcissent, on obtient leurs nouvelles longueurs en multipliant leurs longueurs premières par le nombre constant $1 - R''$; dans les deux cas, tous les côtés de la figure primitive ayant varié dans un rapport constant, et cette figure contenant par hypothèse assez de lignes pour que, si ces lignes ne changent pas ou changent toutes dans un rapport donné, les angles qu'elles font entre elles ne sont pas modifiés, la figure déformée est semblable à la figure primitive, et comme celle-ci est donnée et, par conséquent, possible, la figure déformée l'est également comme lui étant semblable : donc, pour ces deux modes de déformation, les égalités (13) sont satisfaites. C'est, d'ailleurs, ce que l'on peut vérifier directement; car, si toutes les lignes s'allongent ou se raccourcissent, ces conditions deviennent, en supprimant, dans le premier cas, le facteur R' commun à tous les termes et, dans le second, le facteur commun R'' :

$$\frac{dF}{da_1} a_1 + \frac{dF}{da_2} a_2 + \ldots + \frac{dF}{da_m} a_m = 0,$$

équations qui sont satisfaites d'elles-mêmes; car les k relations (7) du § 4,

$$F(a_1, a_2, a_3 \ldots, a_m) = F = 0,$$

étant géométriques et, par suite, homogènes, peuvent, en vertu du théorème sur les fonctions homogènes, s'écrire sous la forme

$$(c) \qquad \frac{dF}{da_1} a_1 + \frac{dF}{da_2} a_2 + \ldots + \frac{dF}{da_m} a_m = 0.$$

Ainsi, quel que soit le nombre de lignes surabondantes que renferme un système de barres libre ou assujetti dans ses déplacements à moins de six conditions pour les figures de l'espace, et à moins de trois pour les figures planes, on peut toujours, de deux manières au moins, satisfaire aux k conditions d'égalité nécessaires pour que la figure puisse, d'une infinité de manières, être constituée en système d'égale résistance; mais les deux modes de dé-

formation qui en résultent pour la figure ne permettent pas, en général, de satisfaire aux conditions d'*inégalité* spécifiées par le théorème V, et voilà pourquoi, même pour les figures libres ou assujetties seulement au nombre de conditions que nous venons d'indiquer, le problème de la résistance égale n'est, en général, pas possible (¹).

§ 11.

Pour mettre ce résultat en évidence par un exemple, prenons le bow-string indiqué sur la *fig. c*, *Pl. XLIV*.

Supposons-le chargé d'un poids unique P au droit de l'un des montants verticaux. Soient b et h la largeur et la hauteur du rectangle central, et $c = \sqrt{b^2 + h^2}$ sa diagonale; soient r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5; t_1, t_2 les tensions des divers côtés de la figure. Les tensions r_0, r_1, r_4, r_5 se trouvent immédiatement par la Statique, en décomposant chacune des forces Q et Q_1 représentant les réactions des appuis, suivant les deux barres qui y concourent : passons donc à la détermination des tensions des six côtés de la croix de Saint-André.

La Statique fournit cinq relations entre ces six tensions. Pour les obtenir simplement, faisons, dans la figure, une section verticale xy qui coupe les quatre barres dont les tensions sont représentées par les lettres

$$r_2,\ t_2,\ t_1,\ r_3,$$

et écrivons que la partie de droite de la figure est en équilibre sous l'action de ces tensions et de la réaction Q_1. En appliquant le théorème des moments relatifs au point A, on aura

$$(r_2 + t_2 \cos\beta)h - Q_1 a = 0, \qquad (18)$$

(¹) Il est bon de remarquer toutefois qu'il existe une infinité de systèmes de forces à l'égard desquelles une telle figure peut devenir d'égale résistance; et, en général, dès qu'une figure satisfait aux conditions d'*égalité* (13), on peut concevoir une infinité de systèmes de forces tels, que les conditions d'inégalité (15) et (15 *bis*) soient satisfaites, tels, par conséquent, que ces forces puissent produire sur les lignes de la figure la résistance égale; mais un système de forces donné au hasard ne sera pas dans ce cas.

a désignant la longueur de la barre AC et β l'angle BA'B', de sorte que

$$(19)\qquad \cos\beta = \frac{b}{c}.$$

De même, le théorème des moments relatifs au point A' donne

$$(20)\qquad (r_3 + t_1 \cos\beta)h + Q_1 a = 0;$$

enfin le théorème des projections sur la verticale donne

$$(21)\qquad (t_1 - t_2)\sin\beta = Q_1,$$

D'un autre côté, la projection, sur la verticale, des tensions agissant au point A, donne

$$(22)\qquad t_1 \sin\beta + s_2 = 0,$$

et la projection analogue au point B

$$(23)\qquad t_2 \sin\beta + s_1 = -P = -\frac{b-2a}{a} Q_1.$$

Si maintenant on appelle α_1 et α_2 les allongements élastiques des deux barres horizontales; β_1 et β_2 les allongements des deux barres verticales; γ_1 et γ_2 ceux des diagonales de la croix, la formule trouvée au § 6_a donne

$$b(\alpha_1 + \alpha_2) + h(\beta_1 + \beta_2) = c(\gamma_1 + \gamma_2);$$

et, en appelant

$$\rho_2, \rho_3;\ \sigma_1, \sigma_2;\ \tau_1, \tau_2$$

les sections des six barres dont les tensions ont été désignées par

$$r_2, r_3;\ s_1, s_2;\ t_1, t_2,$$

et supposant, pour simplifier, toutes les barres formées de la même matière, en sorte que le coefficient d'élasticité disparaisse, il vient, en vertu de la relation (6), entre les allongements élastiques et les tensions correspondantes,

$$(24)\qquad b^2\left(\frac{r_2}{\rho_2} + \frac{r_3}{\rho_3}\right) + h^2\left(\frac{s_1}{\sigma_1} + \frac{s_2}{\sigma_2}\right) = c^2\left(\frac{t_1}{\tau_1} + \frac{t_2}{\tau_2}\right).$$

Les six équations (18), (20), (21), (22), (23), (24) fournissent les six forces élastiques inconnues.

Si l'on veut que toutes les barres subissent même tension par unité de surface, il faut, dans la dernière équation, remplacer les six quantités

$$\text{(A)} \qquad \frac{r_1}{\rho_2}, \quad \frac{r_3}{\rho_3}, \quad \frac{s_1}{\sigma_1}, \quad \frac{s_2}{\sigma_2}, \quad \frac{t_1}{\tau_1}, \quad \frac{t_2}{\tau_2}$$

par $+ R'$ pour les barres tendues et par $- R'$ pour les barres comprimées; et, pour que le problème de la résistance égale fût possible, il faudrait que l'équation ainsi obtenue fût satisfaite, soit par elle-même, soit en vertu de la relation

$$c^2 = b^2 + h^2,$$

existant entre les lignes de la figure. S'il était possible de disposer des sections des barres de façon que toutes les barres pussent être comprimées ou toutes tendues, en les supposant, par exemple, toutes tendues, il faudrait remplacer les six quantités (A) par R' qui disparaîtrait en facteur commun, en sorte que l'équation (24) se réduirait bien à l'identité

$$b^2 + h^2 = c^2.$$

Le problème de la résistance égale serait donc possible si l'on pouvait, en supposant toutes les barres tendues ou toutes comprimées, satisfaire aux équations (18), (20), (21), (22), (23) fournies par la Statique. Mais il est facile de voir que cela ne se peut pas. En effet, on déduit de ces cinq équations

$$\text{(25)} \qquad \left\{ \begin{aligned} t_1 &= \frac{Q_1}{\sin\beta} + t_2, \\ s_1 &= - P - t_2 \sin\beta, \\ s_2 &= - Q_1 - t_2 \sin\beta, \\ r_2 &= Q_1 \frac{a}{h} - t_2 \cos\beta, \\ r_3 &= - Q_1 \left(\frac{a}{h} + \cot\beta \right) - t_2 \cos\beta, \end{aligned} \right.$$

qui montrent qu'il est impossible de supposer toutes les tensions positives ou toutes négatives; car, si t_2 est positif, s_1, s_2 et r_3 sont négatifs; si t_2 est négatif, r_2 est positif.

§ 12.

Allons maintenant un peu plus loin et montrons qu'il est impossible, quelque hypothèse qu'on fasse sur les tensions des barres, même en supposant certaines de ces tensions positives et d'autres négatives, de satisfaire aux conditions d'égale résistance. Pour cela, considérons les valeurs de t_2 qui annulent chacune des cinq tensions formant les premiers membres des équations (25); on trouve, en vertu de $\cos\beta = \frac{a}{b}$,

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{ll} r_3 = 0 & \text{pour } t_2 = -Q_1\left[\frac{a}{h\cos\beta} + \frac{1}{\sin\beta} = -\frac{Q_1}{\sin\beta}\left(1+\frac{a}{b}\right)\right], \\ s_1 = 0 & \text{pour } t_2 = -\frac{Q_1}{\sin\beta}\,\frac{b+2a}{a}, \\ \left.\begin{array}{l} t_1 = 0 \\ s_2 = 0 \end{array}\right\} & \text{pour } t_2 = -\frac{Q_1}{\sin\beta}, \\ r_2 = 0 & \text{pour } t_2 = Q_1\frac{a}{h\cos\beta}. \end{array}\right.$$

De là, en supposant $1 + \frac{a}{b} > \frac{b+2a}{a}$, on déduit le Tableau suivant :

t_2 VARIANT		TENSIONS		CONDITIONS CORRESPONDANTES fournies par l'équation (24) pour la possibilité e l'égale résistance.
de	à	positives.	négatives.	
$-\infty$	$-\frac{Q_1}{\sin\beta}\left(1+\frac{a}{b}\right)$.	r_3, r_2, s_2, s_1	t_2, t_1	$2b^2R' + 2h^2R' + 2c^2R'' = 0$,
$-\frac{Q_1}{\sin\beta}\left(1+\frac{a}{b}\right)$.	$-\frac{Q_1}{\sin\beta}\,\frac{b+2a}{a}$.	r_2, s_2, s_1	t_2, t_1, r_3	$b^2(R' - R'') + 2h^2R' + 2c^2R'' = 0$,
$-\frac{Q_1}{\sin\beta}\,\frac{b+2a}{a}$.	$-\frac{Q_1}{\sin\beta}$	r_2, s_2	t_2, t_1, r_3, s_1	$b^2(R - R') + h^2(R' - R'') + 2c^2R'' = 0$,
$-\frac{Q_1}{\sin\beta}$	0	r_2, t_1	t_2, s_2, r_3, s_1	$b^2(R' - R'') - 2h^2R'' - c^2(R' - R'') = 0$,
0	$Q_1\frac{a}{h\cos\beta}$	r_2, t_1, t_2	s_2, r_3, s_1	$b^2(R' - R'') - 2h^2R'' - 2c^2R' = 0$,
$Q_1\frac{a}{h\cos\beta}$	$+\infty$	t_1, t_2	r_2, s_2, r_3, s_1	$-2b^2R'' - 2h^2R'' - 2c^2R' = 0$.

Les équations de la dernière colonne peuvent s'écrire, à cause de $c^2 = b^2 + h^2$,

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned} &(R'+R'')(2b^2+2h^2)=0,\\ &(R'+R'')(\;b^2+2h^2)=0,\\ &(R'+R'')(\;b^2+\;h^2)=0,\\ -&(R'+R'')h^2=0,\\ -&(R'+R'')(\;b^2+2h^2)=0,\\ -&(R'+R'')(2b^2+\;h^2)=0, \end{aligned}\right.$$

équations toutes impossibles, R′ et R″ étant deux nombres essentiellement positifs. On serait arrivé au même résultat si l'on avait supposé $1 + \frac{a}{b} < \frac{b+2a}{a}$.

Remarque. — Il n'est pas surprenant que toutes les équations (27) renferment le facteur $R' + R''$; ce fait se produit pour tous les systèmes libres ou assujettis à des conditions n'influant que sur leur position. En effet, dans ce cas, l'équation (13) peut, en vertu de celle (*c*) du § 10, être mise sous l'une des deux formes

$$(28)\qquad (R'+R'')\Sigma \frac{dF}{da_i} a_i = 0,$$

$$(29)\qquad -(R'+R'')\Sigma \frac{dF}{da_j} a_j = 0.$$

§ 13.

L'exemple précédent fait bien ressortir l'inconvénient qu'il y a, au point de vue du bon emploi de la matière, à admettre, pour les systèmes de barres, des figures à lignes surabondantes; voici un autre exemple qui rend ce fait plus saillant encore.

Soit (*fig. d, Pl. XLIV*) un système de cinq barres

(*a*) FD, AF, FB, BD, DC,

dont les quatre dernières sont égales; ces barres reposent sur trois points fixes et de niveau A, B, C. En raison de la fixité de ces points, les quatre dernières des barres (*a*) déterminent les sommets F et D, en sorte que la barre FD est surabondante. Je dis qu'il est impossible de faire en sorte que cette barre surabondante travaille à la même pression que les autres sous l'action de deux

charges verticales et égales p appliquées aux sommets F et D. En effet, tout étant symétrique par rapport à la verticale du point B, il suffit d'étudier la déformation élastique de la demi-figure de droite. Si l'on suppose d'abord que les barres BD et CD se compriment toutes deux, comme elles sont égales, leurs raccourcissements seront égaux en vertu des formules (17 *bis*) représentant les raccourcissements dans un système de barres d'égale résistance; donc, dans cette hypothèse, le point D s'abaisserait verticalement et viendrait, après la déformation de la figure, en un point d; de même, le point F viendrait en f sur la verticale du point F, et, à cause de la symétrie, on aurait

$$\mathrm{F}f = \mathrm{D}d, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{FD} = fd,$$

c'est-à-dire que la longueur de la barre FD n'aurait pas changé : donc cette barre subirait une tension nulle, et toute la matière qui la compose serait perdue.

Si l'on suppose que l'une des deux barres BD et CD, la dernière par exemple, se raccourcit, tandis que la première s'allonge, alors le point D viendra en d'. A cause de la symétrie, la ligne FD restera horizontale. Soit d le point où elle croise la verticale du point D; menons $\mathrm{D}j$ et di perpendiculaires à $\mathrm{B}d'$; l'allongement de BD sera jd'; l'allongement de $f\mathrm{D}$ sera $2dd'$; et, comme

$$\mathrm{BD} > \frac{\mathrm{FD}}{2},$$

on aura, à cause des formules (17) et (17 *bis*),

$$jd' > dd',$$

d'où résulterait, *a fortiori*,

$$id' > dd',$$

c'est-à-dire qu'un des côtés de l'angle droit du triangle rectangle idd' serait plus grand que l'hypoténuse, ce qui est absurde. On verra de même que, quelque hypothèse qu'on fasse sur les signes des allongements des barres, il est impossible de faire en sorte que la figure se déforme de manière que toutes les barres travaillent de la même manière. Il y a donc ici, comme dans l'exemple précédent, intérêt à supprimer la barre surabondante.

§ 14.

Nous venons de donner des exemples de systèmes à lignes surabondantes qu'il n'est pas possible de constituer en solides d'égale résistance, parce qu'ils ne satisfont pas à toutes les conditions d'égalité ou d'inégalité spécifiées au théorème V. Nous allons donner maintenant quelques exemples de systèmes satisfaisant à ces conditions, et pouvant, par suite, subir l'égale résistance de la part d'un système de forces données, d'une infinité de manières, c'est-à-dire pour une infinité de valeurs différentes données aux sections des barres.

Voici d'abord un procédé général permettant de constituer de tels systèmes : considérons un système de barres ne contenant pas de lignes surabondantes, en équilibre sous l'action de forces données; on pourra toujours (théorème IV), d'une manière et d'une seule, le constituer en système d'égale résistance. Supposons qu'il soit tel, et soient S_i les sections de ses barres; désignons par (F) et (Φ) les formes géométriques qu'il affecte avant et après sa déformation élastique.

Admettons que la figure (F) soit telle, qu'en y traçant des lignes surabondantes de longueurs a_j, les longueurs des lignes correspondantes, sur la figure (Φ), soient $a_j(1+R')$ ou $a_j(1-R')$, l'une ou l'autre de ces expressions pouvant se rapporter à tout ou partie des k lignes surabondantes. Cela revient à supposer qu'on satisfait aux k conditions d'égalité du théorème V, en prenant, parmi les 2^{m-k} figures déformées que l'on peut admettre pour (F), celle (Φ); mais je dis qu'en admettant cette figure (Φ) on satisfait aussi aux conditions d'*inégalité* du théorème V, de sorte que la figure (F), avec les k lignes surabondantes qu'on y a tracées, peut, d'une infinité de manières, être constituée en système d'égale résistance à l'égard des forces données.

Pour le démontrer, il suffit d'établir qu'on peut d'une infinité de manières satisfaire aux $m-k$ équations que la Statique fournit entre les m tensions des barres, en donnant à chaque tension le signe qu'elle doit avoir pour que la figure (F) devienne (Φ), après la déformation élastique. Or on le peut par hypothèse, d'une manière, en supposant aux k barres surabondantes des tensions

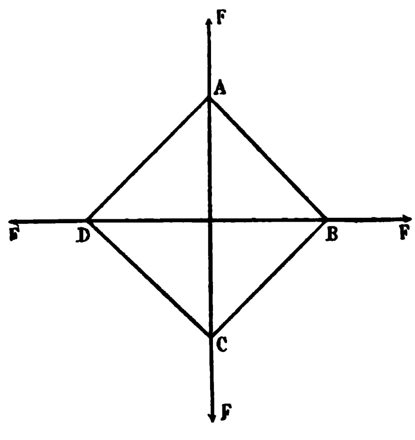
nulles, et aux $m - k$ autres, des tensions fournies per les équations de la Statique; donc on le pourra d'une infinité d'autres manières en supposant aux k premières des valeurs positives ou négatives [suivant qu'il s'agit de barres allongées ou raccourcies lors du passage de (F) à (Φ)], suffisamment petites en valeur absolue pour que les signes des $m - k$ dernières ne soit pas modifiés.

§ 14_a.

Voici un exemple théorique très simple d'un système pouvant être d'égale résistance relativement à des forces données, pour une infinité de valeurs des sections des barres qui le composent.

Il est formé (*fig. e*, p. 249) par les quatre côtés AB, BC, CD,

Fig. *e*.



DA d'un carré et ses deux diagonales. Supposons-le soumis à deux forces égales et opposées F appliquées aux extrémités de chacune des deux diagonales.

Il est clair qu'ici tous les côtés sont tendus. Soient a le côté du carré et $b = a\sqrt{2}$ sa diagonale.

Soient S_a et S_b les sections à donner à ces deux espèces de barres pour l'égale résistance; t_a et t_b les tractions qu'elles subissent. En écrivant qu'un sommet quelconque est en équilibre,

on a

$$t_a\sqrt{2}+t_b=\mathrm{F}. \tag{1}$$

C'est la seule équation que la Statique fournisse entre les deux tensions inconnues.

D'autre part, si α et β sont respectivement les allongements des côtés et des diagonales, on a (§ 6)

$$2a\times\alpha=b\times\beta. \tag{2}$$

L'égale résistance donne

$$\frac{t_a}{\mathrm{S}_a}=\frac{t_b}{\mathrm{S}_b}=\mathrm{R}$$

et

$$\frac{\alpha}{a}=\mathrm{ER},$$

$$\frac{\beta}{b}=\mathrm{ER}.$$

Par suite, l'équation (2) devient

$$2a^2=b^2,$$

qui est exacte.

Ainsi la condition (2) est ici satisfaite, et celle (1) devient

$$\mathrm{S}_a\sqrt{2}+\mathrm{S}_b=\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{R}}. \tag{3}$$

Quelles que soient les sections S_a *et* S_b *adoptées, pourvu qu'elles satisfassent à la condition* (3), *le système sera d'égale résistance.*

§ 14_b.

ARCS RÉTICULAIRES D'ÉGALE RÉSISTANCE. — Essayons, en opérant comme dans la Note I (III[e] Partie), de constituer *a priori* un arc réticulaire d'égale résistance en le supposant d'abord posé sur deux tourillons simples.

La condition d'invariabilité de la longueur de la corde est (§ 634).

$$\sum\frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{ES}h^2}y=0, \tag{a}$$

la somme Σ se rapportant à toutes les barres.

Supposons l'arc ainsi que la charge relativement à laquelle on cherche à le rendre d'égale résistance symétriques par rapport à la verticale de la clef.

Alors il suffit d'étendre la somme Σ aux barres d'une moitié de l'arc, par exemple de la moitié de gauche. Il faut, pour que l'équation (a) puisse être satisfaite, que, dans cette moitié, le moment de flexion change de signe au moins une fois; sans cela, tous les termes du premier membre étant de même signe, l'égalité ne pourrait pas être satisfaite.

Admettons, sauf vérification, qu'il ne change de signe qu'une fois dans cet intervalle.

Appelons $\sum\limits_{+}^{s}$ une somme se rapportant aux nœuds supérieurs (ou aux barres inférieures) dans toute la partie de l'arc où M est positif, $\sum\limits_{+}^{i}$ la somme analogue pour les nœuds inférieurs.

Appelons de même $\sum\limits_{-}^{s}$ et $\sum\limits_{-}^{i}$ des sommes se rapportant respectivement aux nœuds supérieurs et inférieurs de la partie de l'arc où M est négatif.

L'équation ci-dessus devient, en supposant le coefficient d'élasticité le même pour toutes les barres,

$$\sum_{+}^{s}\frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{S}h^2}y+\sum_{+}^{i}\frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{S}h^2}y+\sum_{-}^{s}\frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{S}h^2}y+\sum_{-}^{i}\frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{S}h^2}y=0.$$

On a, par le théorème de Ritter,

$$t=\frac{\mathrm{M}}{h},$$

h étant regardé comme positif (§ 205, 1re Partie) pour les nœuds supérieurs et comme négatif pour les nœuds inférieurs. Donc dans les deux sommes $\sum\limits_{+}^{s}$ et $\sum\limits_{-}^{i}$ on a $t<0$ et, par suite, la condition d'égale résistance pour les termes de ces deux sommes est

$$\frac{t}{\mathrm{S}}=+\mathrm{R}$$

ou

$$\frac{M}{Sh} = + R.$$

Supposons, pour simplifier, que $R' = R$, c'est-à-dire que la résistance à la compression est la même que celle à l'extension.

Alors, pour les termes des deux autres sommes, on aura

$$\frac{M}{Sh} = - R.$$

Portant ces valeurs dans l'équation, elle devient

$$\sum_{+}^{s} \frac{a}{h} y - \sum_{+}^{i} \frac{a}{h} y - \sum_{-}^{s} \frac{a}{h} y + \sum_{-}^{i} \frac{a}{h} y = 0,$$

Mais, pour les nœuds inférieurs, h est négatif. Supprimons son signe, en le mettant en évidence, c'est-à-dire remplaçons h par $-h$ dans les termes se rapportant aux barres inférieures; alors l'équation devient

$$\sum_{+}^{s} \frac{a}{h} y + \sum_{+}^{i} \frac{a}{h} y$$
$$= \sum_{-}^{s} \frac{a}{h} y + \sum_{-}^{i} \frac{a}{h} y = \frac{1}{2}\left(\sum_{+}^{s} \frac{a}{h} y + \sum_{-}^{s} \frac{a}{h} y + \sum_{+}^{i} \frac{a}{h} y + \sum_{-}^{i} \frac{a}{h} \right),$$

ou, en appelant $\sum_{+}$ une somme s'étendant à tous les nœuds tant inférieurs que supérieurs, de la partie de l'arc où le moment est positif, $\sum_{-}$ la somme analogue dans la partie de l'arc où le moment est négatif et $\sum$ une somme s'étendant à toutes les barres du demi-arc considéré, en sorte que

$$\sum = \sum_{+} + \sum_{-},$$

on aura

$$(b) \qquad \sum_{+} \frac{a}{h} y = \sum_{-} \frac{a}{h} y = \frac{1}{2} \sum \frac{a}{h} y$$

L'équation analogue obtenue pour les arcs pleins dans la Note précédente était

$$(c)\qquad \int_+ \frac{ds}{h} y = \int_- \frac{ds}{h} y = \frac{1}{2} \int \frac{ds}{h} y,$$

c'est-à-dire que, pour passer de ce cas à celui qui nous occupe, il suffit de remplacer les éléments ds de l'arc par les longueurs a des barres principales et la hauteur h de l'arc par les distances h comptées toutes positivement, de ces barres à leurs nœuds opposés.

Supposons d'abord que les hauteurs h et les longueurs a des barres puissent être regardées comme sensiblement constantes. L'équation se réduit à

$$(d)\qquad \sum_+ y = \sum_- y = \frac{1}{2} \sum y.$$

On numérotera les nœuds en partant de la naissance de gauche et allant en zigzag d'un nœud supérieur à un nœud inférieur, et *vice versa*. De cette façon, la naissance de gauche ayant le n° 0, les nœuds supérieurs auraient des numéros impairs et les nœuds inférieurs des numéros pairs.

Sur une verticale (*fig.* f, p. 254) on portera bout à bout, par exemple de haut en bas, les ordonnées y des nœuds, dans l'ordre où on les a numérotés.

A l'extrémité de l'ordonnée se rapportant à chaque nœud, mettons le numéro de ce nœud, de sorte qu'on portera successivement bout à bout l'ordonnée $a.1 = y_1$ du premier nœud supérieur à partir de la naissance, puis la longueur $1.2 = y_2$ égale à l'ordonnée du premier nœud inférieur, puis $2.3 = y_3$, égale à l'ordonnée du second nœud supérieur à partir de la naissance, et ainsi de suite.

Au lieu des ordonnées elles-mêmes, on peut porter ces lignes amplifiées ou réduites dans un même rapport quelconque.

On aboutira ainsi à un point b. Soit O le milieu de ab.

Dans le cas exceptionnel où le point O coïncide exactement avec un point de division, celui n° n, alors l'équation (d) sera satisfaite *exactement* en supposant que le moment de flexion M change de signe au nœud n° n.

La poussée sera déterminée par cette condition.

Mais, par cela même que M = o au nœud n° n, la tension

$$t=\frac{M}{h}$$

de la barre opposée sera nulle. Donc la section à donner à cette barre est aussi nulle en vertu de la condition d'égale résistance, ce qui équivaut à la supprimer. Mais alors l'arc devient *librement dilatable*.

Fig. *f*.

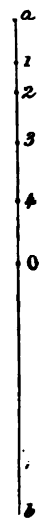
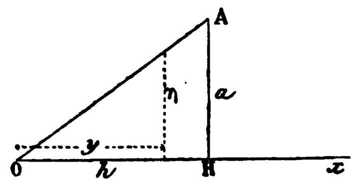


Fig. *f'*.



Supposons à présent que le point O tombe entre les points de division n°s n et $n+1$: cela prouve que le moment de flexion s'annule entre les deux nœuds portant ces numéros et l'égalité (b) ne peut pas être rigoureusement satisfaite.

Mais la différence de ses deux membres est aussi faible que possible (et très faible) si l'on admet que le moment de flexion M change de signe entre les nœuds n et $n+1$.

Quel que soit le point compris entre ces nœuds où on lui suppose un changement de signe, l'égale résistance se trouve satisfaite *approximativement*.

Le plus simple est donc de disposer l'arc de façon que ce chan-

gement de signe se produise en celui des deux nœuds n ou $n+1$ qui correspond au numéro le plus voisin de O sur la ligne ab, *c'est-à-dire de supprimer la barre opposée à ce nœud, et alors le système, étant librement dilatable, peut être rendu rigoureusement d'égale résistance.*

Si a et h ne sont pas constants, construisons, pour tous les nœuds, les longueurs

$$\eta = \frac{a}{h} y,$$

en nous servant d'une droite Ox (*fig. f*).

On opérera sur les longueurs η au lieu d'opérer sur les longueurs y, et l'on arrivera aux mêmes conclusions, de sorte que nous pouvons énoncer cette proposition :

THÉORÈME. — *Un arc réticulaire posé sur tourillons simples ne peut jamais être d'égale résistance, à moins qu'on en supprime une barre de façon à le rendre dilatable.*

Mais la méthode qui précède fournit *la barre qu'il est convenable de supprimer.*

On aurait pu aussi déterminer par le calcul ou graphiquement les rapports $\frac{a}{h}$ et chercher la somme des moments des forces fictives horizontales et toutes de même sens égales ou proportionnelles à $\frac{a}{h}$ appliquées aux nœuds, puis, à l'aide d'un polygone funiculaire, la somme des moments de ces forces par rapport à un point de la corde de l'arc.

En opérant ainsi, on est ramené exactement à la méthode suivie dans la Note I de la IIIe Partie de cet Ouvrage.

Cette méthode s'étend aux arcs avec encastrement et donne lieu alors à une discussion tout à fait pareille à celle qui fait l'objet de cette Note.

Dans les équations de cette Note, il suffit de changer partout

$$\int \frac{ds}{h}, \quad \int \frac{ds}{h} x, \quad \int \frac{ds}{h} y$$

en

$$\sum \frac{a}{h}, \quad \sum \frac{a}{h} x, \quad \sum \frac{a}{h} y,$$

en attribuant aux $\frac{a}{h}$ les mêmes signes qu'aux $\frac{ds}{h}$, c'est-à-dire en regardant ces rapports comme positifs.

§ 17.

De toute la théorie et des exemples qui précèdent il résulte que les systèmes ne contenant pas de lignes surabondantes sont, en général, les seuls qui puissent être constitués en solides d'égale résistance. On en déduit cette conséquence nouvelle et importante, que les meilleures constructions sont, en général, les plus simples, celles qui renferment le moins de pièces possible. Cependant le théorème V et les exemples des § 15 et 16 indiquent que, dans certains cas déterminés par la théorie, des systèmes à k lignes surabondantes peuvent aussi devenir d'égale résistance, et alors ils le peuvent d'une k^{tuple} infinité de manières, c'est-à-dire qu'on peut alors, sans cesser d'avoir l'égale résistance de toutes les barres, disposer, dans de certaines limites, des sections de k d'entre elles. On comprend que cette faculté puisse être précieuse pour le constructeur; et comme, en définitive, dans l'établissement des grandes charpentes, les longueurs de toutes les barres ne sont jamais commandées d'avance, qu'une fois arrêtée la forme générale de la figure géométrique que l'on veut adopter pour une charpente, les longueurs de ses divers côtés sont, en grande partie, arbitraires, on comprend que l'on puisse très souvent disposer de ces longueurs, de façon à satisfaire aux k conditions (13) nécessaires pour que, en adoptant une figure à k lignes surabondantes, elle se trouve précisément dans le cas de pouvoir être d'une infinité de manières érigée en système d'égale résistance.

On doit dès lors se demander si, au point de vue économique, il y a lieu de préférer de telles figures, quand elles sont possibles, à celles qui ne contiennent pas de lignes surabondantes. Nous allons voir que cette question se résout par la négative, et qu'ainsi on arrive à cette conclusion que jamais, même dans les cas exceptionnels spécifiés par le théorème V, il n'y a économie à adopter des constructions formées par des figures géométriques à lignes surabondantes.

Lemme. — *Si une figure à k lignes surabondantes est telle-*

ment constituée qu'on puisse, d'une manière et par suite d'une infinité de manières, disposer des sections de ses barres de façon qu'elle forme système d'égale résistance relativement à des forces extérieures données, on peut toujours, en supprimant une partie de ses barres, former un système sans lignes surabondantes *qui, soumis aux mêmes forces, subisse les mêmes déformations élastiques que le système primitif.*

Soit une figure formée de m barres et contenant k lignes surabondantes. Nous admettons qu'il est possible d'une et, par suite, d'une infinité de manières, de donner à ces barres des sections telles que les barres tendues supportent toutes même tension et les barres pressées toutes même pression par unité de surface et par unité du coefficient d'élasticité de la matière. Soit S_i un système de sections calculées de façon qu'il en soit ainsi. Soient (F) et (Φ) les figures géométriques que forment alors les axes des barres avant et après la déformation élastique.

Il s'agit de montrer qu'on peut toujours supprimer k ou un nombre plus grand de barres, sans que la figure cesse de prendre, après la déformation, la forme (Φ).

Soient t_i les tensions des barres de section S_i. Nous pouvons d'une infinité de manières faire varier ces sections S_i et les tensions correspondantes t_i sans que le système cesse d'être d'égale résistance et sans que la figure déformée cesse d'affecter la forme (Φ) : il suffit pour cela (§ 8) que les variations soient telles qu'elles ne modifient le signe d'aucune tension; comme on dispose de k sections sous la seule réserve de ne les faire varier que de manière à ne pas changer les signes des tensions, conservons leurs valeurs à $k-1$ de ces sections et par suite aux tensions correspondantes, et ne faisons varier que la $k^{\text{ième}}$ section, que nous appellerons S_k; la tension correspondante prendra des valeurs t_k fournies par la condition de la résistance égale et les $m-k$ autres tensions fournies par les $m-k$ équations de la Statique varieront en fonction de la seule quantité t_k ou de celle S_k, en sorte que les tensions t_i de toutes les barres sont déterminées pour chaque valeur attribuée à S_k. Faisons $S_k = 0$, et soient t'_i les valeurs correspondantes des tensions t_i; si toutes les tensions t'_i ont mêmes signes que les tensions correspondantes t_i, il s'ensuit que, pour $S_k = 0$, le système

de barres continuera de prendre, après la déformation, la forme (Φ); et comme l'une de ses barres a une section nulle, on peut dire que, dans ce cas, il existe un système d'égale résistance composé de $m - 1$ barres seulement, et affectant, après la déformation, la même forme (Φ) que le système donné.

Supposons maintenant qu'une ou plusieurs des tensions t'_i n'aient pas les mêmes signes que les tensions correspondantes t_i; alors, en faisant décroître S_k progressivement, il arrivera nécessairement que pour une valeur $S_k = S'_k$, comprise entre S_k et zéro, l'une au moins des tensions t_i s'annule, toutes les autres conservant leurs signes. Donc, pour cette valeur $S_k = S'_k$, le système affectera toujours, après la déformation, la forme (Φ); et comme, à cause de la résistance égale, la section de la barre dont la tension s'annule est elle-même nulle, on aura encore un système formé de $m - 1$ barres seulement et prenant, après la déformation, la forme (Φ). Ainsi, étant donné un système d'égale résistance formé de m barres et contenant des lignes surabondantes, on peut toujours constituer un autre système d'égale résistance, formé de $m - 1$ barres seulement et affectant, après la déformation élastique, la même forme géométrique que le proposé.

Si ce nouveau système contient encore des lignes surabondantes, on pourra réduire encore d'au moins une unité le nombre de ses barres, sans modifier les déplacements élastiques de ses divers sommets, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à une figure ne contenant plus de lignes surabondantes.

§ 18.

Cela posé, soit T la somme des travaux de toutes les forces extérieures appliquées aux différents sommets de la figure, dus aux déplacements élastiques de ces sommets. Comme ces déplacements sont compatibles avec les liaisons du système, il n'entrera dans l'expression de T aucune force de liaison. Si maintenant on remplace le système à barres surabondantes que forme la figure (F) par le système sans barres surabondantes que nous appellerons (F_1) et qui donne lieu aux mêmes déplacements élastiques des sommets, le travail T des forces extérieures dû à la déforma-

tion élastique sera le même, que ces forces soient appliquées à la figure (F) ou à la figure (F_1).

Soient maintenant, dans un système quelconque, t_i la tension positive d'une barre et α_i son déplacement élastique ; le travail de la tension de cette barre qui s'allonge de α_i est

$$\tfrac{1}{2} t_i \alpha_i \quad (^1);$$

d'ailleurs, si le système est d'égale résistance,

$$t_i = E_i S_i R',$$

d'où

$$\alpha_i = a_i \frac{t_i}{E_i S_i} = a_i R'$$

et

$$\frac{1}{2} t_i \alpha_i = \frac{R'^2}{2} E_i a_i S_i;$$

par suite, la somme des travaux des forces élastiques de toutes les barres qui s'allongent est

$$\frac{1}{2} \Sigma t_i \alpha_i = \frac{R'^2}{2} \Sigma a_i E_i S_i.$$

La tension d'une barre a_j qui se raccourcit est

$$t_j = - a_j S_j R'',$$

son allongement

$$\alpha_j = - a_j R'';$$

d'où, pour le travail de la compression,

$$\frac{1}{2} t_j \alpha_j = \frac{R''^2}{2} E_j a_j S_j$$

et, pour la somme des travaux de toutes les compressions,

$$\frac{R''^2}{2} \Sigma a_j E_j S_j.$$

---

(1) Ce travail est

$$\int_0^{\alpha_i} t_i d\alpha_i,$$

et comme on a

$$t = \frac{E_i S_i}{a_i} \alpha_i = K \alpha_i,$$

ce travail est

$$K \frac{\alpha_i^2}{2} = \frac{1}{2} t_i \alpha_i.$$

La somme des travaux de toutes les forces élastiques du système, pressions et tensions, est donc

$$\frac{R'^2}{2}\Sigma a_i E_i S_i + \frac{R''^2}{2}\Sigma a_j E_j S_j.$$

Cette somme étant nécessairement égale au travail des forces extérieures,

$$\frac{R'^2}{2}\Sigma a_i E_i S_i + \frac{R''^2}{2}\Sigma a_j E_j S_j = T.$$

Si l'on admet, comme on le fait d'habitude, que la matière résiste également à l'extension et à la compression, c'est-à-dire si l'on suppose $R' = R''$, cette équation devient, en appelant Σ une somme s'étendant à toutes les barres, aussi bien à celles tendues qu'à celles pressées,

$$(30) \qquad \frac{R'^2}{2}\Sigma a_i E_i S_i = T.$$

Dans le cas particulier où toutes les barres sont composées de la même matière ou de matières ayant même coefficient d'élasticité E, cette équation devient

$$(31) \qquad \Sigma a_i S_i = \frac{2T}{ER'^2}.$$

Le produit $a_i S_i$ est le volume de la barre de longueur a_i; le premier membre représente donc le volume total de matière employée, et, comme le second membre est le même pour le système (F) que pour le système (F_1), on conclut :

Théorème V. — *Lorsqu'un système, contenant k lignes surabondantes et composé de barres formées toutes de la même matière, est tel qu'il puisse, d'une manière et, par suite, d'une infinité de manières, être édifié en système d'égale résistance relativement à des forces extérieures données, il existe toujours un système, sans lignes surabondantes, susceptible de résister aux mêmes forces avec la même dépense de matière.*

Ainsi, comme nous l'avons annoncé, même dans le cas particulier où l'on peut, sans cesser d'avoir l'égale résistance, employer

des figures à lignes surabondantes, il n'y a pas, au point de vue économique, intérêt à le faire.

Si les barres sont composées de matières différentes, alors on voit par l'équation (30) que le dernier théorème doit être remplacé par celui-ci :

Théorème VI. — *Lorsqu'un système contenant k lignes surabondantes est tel qu'il puisse, d'une manière et, par suite d'une infinité de manières, être édifié en système d'égale résistance, relativement à des forces données agissant sur lui, il existe toujours un système, sans lignes surabondantes, susceptible de résister aux mêmes forces et tel, que la somme des produits des volumes des barres par leurs coefficients d'élasticité respectifs est la même dans ce système et dans le système donné.*

Et comme la somme des produits dont il s'agit ici représente en quelque sorte le *poids élastique* des matières employées, on voit qu'ici, comme dans le cas précédent, il n'y a pas intérêt, même quand on le peut, à faire usage de figures à lignes surabondantes.

IV.

Comparaison entre les principales poutres employées en Europe et aux États-Unis, au point de vue du volume de matière à dépenser pour résister à des charges uniformes ou roulantes.

§ 19.

De toute la théorie qui précède, il résulte que les systèmes de charpentes les meilleurs, les plus économiques, sont ceux dont les figures géométriques ne contiennent pas de lignes surabondantes; par exemple, la poutre simplement triangulée est plus avantageuse que celle à croix de Saint-André; celle-ci plus avantageuse que la poutre à treillis, si usitée chez nous et à peu près disparue aux États-Unis, où elle avait pourtant pris naissance; et ainsi de suite.

Il résulte de là que, si l'on veut chercher, parmi toutes les grandes poutres posées sur deux appuis, celle qui, pour résister à des charges données, exigera le moindre volume de matière, il suffira de faire cette recherche parmi les poutres ne contenant pas de lignes surabondantes. Nous pouvons, par exemple, écarter *a priori* la poutre à croix de Saint-André et celle à treillis; nous sommes bien certain d'avance, et sans faire aucun calcul, que la poutre triangulée l'emportera sur elles dans le parallèle que nous nous proposons de faire.

Il importe pourtant de bien nous expliquer à ce sujet : il ne faudrait pas croire qu'étant donnés au hasard deux systèmes de barres, l'un contenant, l'autre ne contenant pas de lignes surabondantes, on puisse affirmer qu'à résistance égale le premier exigera nécessairement, et par cela seul qu'il contient des lignes surabondantes, plus de matière que le second; le contraire peut se produire si les figures géométriques formées par les deux systèmes sont différemment constituées, et le dernier peut alors se trouver établi de façon si défectueuse que, tout en ne contenant pas de lignes surabondantes, il absorbe plus de matière que le premier. Mais ce qui ressort de l'ensemble de la théorie qui précède, et notamment du théorème V, c'est que, étant donné un système de barres à lignes surabondantes, on peut toujours, en lui enlevant un nombre suffisant de barres, former un système, sans lignes surabondantes, plus économique ou *au moins* aussi économique que lui; et cela suffit pour que, dans la recherche des systèmes les plus économiques, il nous soit permis d'écarter les systèmes à lignes surabondantes. Ainsi, quand nous écartons la poutre à croix de Saint-André, nous n'entendons pas pour cela dire qu'elle soit plus dispendieuse que *l'un quelconque* des systèmes sans lignes surabondantes que nous étudierons, mais seulement que l'un d'entre eux, à savoir celui que l'on obtient en débarrassant les croix de Saint-André de leurs lignes surabondantes, et, comme le système ainsi obtenu ne peut être que la poutre triangulée, il suffit que nous comprenions cette dernière dans le parallèle que nous allons faire.

De même, si l'on désignait quelque autre système que ce fût à lignes surabondantes, on pourrait indiquer un système sans lignes surabondantes susceptible de le remplacer avec économie, ou

tout au moins sans augmentation dans la dépense de matière, pouvant, dès lors, le remplacer dans la comparaison que nous voulons faire.

Cette conséquence, entièrement rigoureuse, de la théorie est, du reste, parfaitement d'accord avec le sentiment de la pratique. En Amérique, les ingénieurs, au moins les plus estimés, n'emploient, depuis quelques années, que des poutres calculables par les seules règles de la Statique; il se trouve ainsi qu'en cherchant la simplicité dans le calcul et dans l'exécution ils ont obtenu des systèmes d'égale résistance; mais, comme ils paraissent avoir été guidés moins par des raisons scientifiques que par le sentiment et le désir de faire des calculs sûrs et simples, ils sont bien loin d'avoir trouvé les meilleurs systèmes d'égale résistance; plusieurs d'entre eux ont même conservé, dans leurs innovations, des systèmes à lignes surabondantes, c'est-à-dire, d'après ce qui précède, non susceptibles d'être rendus d'égale résistance et non susceptibles d'être calculés par la Statique, et ils les calculent par des méthodes semi-empiriques souvent défectueuses : tels sont les systèmes Jones, Murphy-Whipple, Linville et Post. Nous les écartons, par les raisons indiquées plus haut, comme étant à lignes surabondantes, comme pouvant, par conséquent, être remplacés par des systèmes à triangles que nous savons d'avance être plus économiques ou au moins aussi économiques. Il est remarquable, du reste, et ceci est encore une concordance entre la théorie et le sentiment de la pratique, que ces systèmes sont beaucoup moins employés que le système Fink qui est sans lignes surabondantes. Ainsi M. Malézieux rapporte qu'il donne la description du système Murphy-Whipple d'après un Traité de construction des ponts de M. Merrill; mais que, dans son voyage d'exploration, il n'a trouvé aucun ouvrage construit dans ce système.

Nous mettrons en parallèle les systèmes Fink, Bollman et les diverses variétés des systèmes à triangles, c'est-à-dire, parmi les systèmes usités en Europe et aux États-Unis, tous ceux qui ne contiennent pas de lignes surabondantes; nous chercherons, pour chacun d'eux, le volume de matière nécessaire pour résister à une charge permanente et à une charge roulante. Nous chercherons ensuite quel est celui qui, dans les divers cas que présente la pratique, donne lieu à la plus grande économie de matière, et nous

serons certain ainsi, sans avoir besoin de nous occuper des systèmes à lignes surabondantes, d'avoir trouvé, parmi tous les systèmes usités, *qu'ils soient ou non à lignes surabondantes,* quel est celui qui, dans chaque cas, est le plus avantageux à employer.

§ 20.

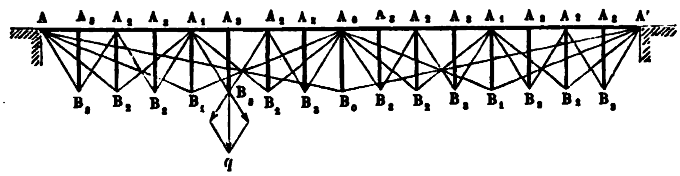
Autrefois on remplaçait, dans les épreuves des ponts, les charges roulantes par des poids morts supposés, comme la charge permanente, uniformément répartis sur la longueur du tablier; mais, à la suite d'un accident survenu dans ces dernières années, une circulaire de M. le Ministre des Travaux publics, en date du 15 juin 1869, a prescrit, pour tous les ponts établis sur des routes nationales ou départementales, de faire les épreuves non seulement au moyen de poids morts, mais aussi avec des charges roulantes, en y faisant circuler au pas et stationner, pendant une demi-heure, sur le nombre de files que comporte la largeur de la voie charretière, soit des chariots à deux roues attelés de cinq chevaux et pesant 11 tonnes, équipages compris, soit des voitures à quatre roues attelées de huit chevaux et d'un poids total de 16 tonnes, suivant que l'un ou l'autre de ces genres de véhicules produit les effets les plus défavorables au point de vue de la résistance. Ces chiffres de 11 et 16 tonnes sont d'ailleurs justifiés, parce que ce sont les limites des chargements autorisés par le règlement du 10 août 1852 sur la police du roulage.

Il ne suffit pas, d'après cela, de disposer les diverses barres d'une poutre de façon qu'elles puissent résister à *une charge déterminée;* il faut concevoir un véhicule dans les diverses positions qu'il occupe lors du parcours d'un pont, lui adjoindre la charge permanente et faire les calculs de façon que, *quelle que soit la position du véhicule,* aucune barre ne subisse des tensions ou des pressions plus fortes que celles que comporte la matière employée. Il faut donc, pour chaque position du véhicule, chercher quelles sont les barres qui sont le plus fatiguées, et leur donner les sections nécessaires pour résister à cette fatigue. C'est ainsi que nous procéderons dans ce qui va suivre.

§ 21.

SYSTÈME FINK. — Description. — Une semelle unique AA'; en son milieu A_0, un montant vertical ou poinçon A_0B_0 dont on relie l'extrémité B_0 aux deux extrémités de la poutre par deux tirants.

Fig. 82.



On opère sur chaque moitié de la semelle comme sur la semelle entière, c'est-à-dire qu'au milieu A_1 de chaque moitié on place un montant A_1B_1 dont l'extrémité inférieure B_1 est reliée aux deux extrémités de cette moitié de semelle. On opère de même sur chacun des quatre quarts de la semelle, et ainsi de suite.

Supposons généralement qu'on divise ainsi la semelle en 2^n parties égales; nous appellerons :

A_0 le milieu de la semelle;
A_1 les 2^1 ou 2 points milieux de chaque $\frac{1}{2}$ semelle;
A_2 les 2^2 ou 4 points milieux de chaque $\frac{1}{4}$ de semelle;
A_3 les 2^3 ou 8 points milieux de chaque $\frac{1}{8}$ de semelle,

et généralement

A_i les 2^i points milieux de chaque $\frac{1}{2^i}$ fraction de la semelle,

de telle sorte que, si la semelle est divisée en 2^n parties égales, les points de division ayant l'indice le plus élevé auront l'indice $n-1$, et seront au nombre de 2^{n-1}. En effet, si l'on divise la poutre en 2^n parties, le nombre des points de division est $2^n - 1$.

On vérifie bien qu'il en est ainsi, car on a

$$
\begin{array}{ll}
& 2^0 = 1 \text{ point de division } A_0, \\
& 2^1 = 2 \text{ points de division } A_1, \\
& 2^2 = 4 \text{ points de division } A_2, \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
& 2^{n-i} \text{ points de division } A_{n-i}, \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
& 2^{n-1} \text{ points de division } A_{n-1}, \\
\text{Total}\dots\dots & 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 \text{ points de division.}
\end{array}
$$

Nous appellerons B_i les extrémités inférieures des montants issus des points A_i.

Soient maintenant n' le nombre total des sommets, y compris les deux extrémités de la semelle, et m' le nombre total des côtés de la figure; on aura

$$n' = 2(2^n - 1) + 2 = 2^{n+1}$$

et, en observant que de chaque point B_i partent trois lignes et que la semelle comprend 2^n parties pouvant subir des tensions distinctes,

$$m' = 3(2^n - 1) + 2^n = 2 \times 2^{n+1} - 3$$

ou

$$m' = 2n' - 3,$$

relation qui indique (§ 3) que, quel que soit le nombre 2^n des divisions, les tensions des barres sont calculables par la Statique.

22.

Charge permanente. — Cherchons d'abord ces tensions dans l'hypothèse où la poutre porte une charge uniformément répartie à raison de p kilogrammes par mètre courant, de sorte que, si L est sa longueur et P la charge totale qu'elle porte, on a

$$(a) \qquad P = pL.$$

Nous admettons que cette charge porte par fractions égales sur

chacun des sommets A_i, en sorte que chaque sommet porte une charge

$$(b) \qquad q = \frac{P}{2^n},$$

et les deux extrémités de la poutre portent chacune la moitié de cette quantité. Il en résulte que la réaction de chacun des appuis sera

$$(c) \qquad R = \frac{P}{2} - \frac{P}{2 \times 2^n} = \frac{P}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

La distance entre deux points consécutifs A_i est d'ailleurs

$$(d) \qquad a = \frac{L}{2^n}.$$

Cela posé, pour trouver les tensions des barres, nous observerons que de chaque point B_i ne partent que trois barres; donc, si l'on connaissait les tensions de l'une d'elles, par exemple celle du montant, par une simple décomposition de forces, on aurait celles des deux tirants.

On a donc de suite la tension de tous les montants $A_{n-1}B_{n-1}$ issus des points A_{n-1} (sur la figure ci-dessus, A_3); car de chacun de ces points ne part qu'une seule pièce qui est le montant vertical : donc ce montant supporte une compression égale à toute la charge q exercée au point A_{n-1}, et par suite les deux tirants partant des points B_{n-1} supportent chacun une tension égale à

$$\frac{q\sqrt{h^2 + a^2}}{2h},$$

comme on le voit par le losange des forces.

Maintenant que l'on connaît les tensions des tirants allant des points B_{n-1} aux points A_{n-2} (sur la figure de B_3 à A_2), on voit qu'en chaque point A_{n-2} les tensions des deux tirants qui y aboutissent se recomposent entre elles pour donner une force verticale q, laquelle, ajoutée à la charge q agissant sur chaque sommet A_{n-2}, donnera $2q$ pour la compression totale exercée sur chaque montant $A_{n-2}B_{n-2}$. Par suite les tirants issus de B_{n-2} supportent chacun une tension

$$\frac{2q\sqrt{h^2 + 2^2a^2}}{2h}.$$

Les tensions de ces tirants qui partent de B_{n-2} pour aboutir à A_{n-3} (sur la figure de B_2 à A_1) se composent entre elles et donnent une résultante verticale $2q$; les tirants issus de B_{n-1} et aboutissant à A_{n-3} (sur la figure de B_3 à A_1) donnent eux-mêmes, comme nous venons de le voir, une résultante verticale q, soit en tout $3q$ et, en y ajoutant la charge q exercée en A_{n-3}, on trouvera $4q$ pour la compression des montants issus de ces points.

En continuant ainsi, on trouvera facilement la loi des tensions. Nous la résumons dans le Tableau suivant, où nous donnons aussi le volume de matière que doit contenir chaque barre pour que sa tension ou sa compression par unité de surface (nous supposons que la matière résiste également bien à l'extension et à la compression) soit un nombre donné R :

DÉSIGNATION DES PIÈCES. (1).	TENSION de chaque pièce (¹). (2).	VOLUME de chaque pièce. (3).	NOMBRE des pièces similaires comme tension et comme volume. (4).	VOLUME TOTAL par ensemble de pièces similaires. (5).	OBSERVATIONS. (6).
Montants $A_{n-1}B_{n-1}$	$-q$	$\frac{qh}{R}$	2^{n-1}	$2^{n-1}\times\frac{qh}{R}$	(¹) Les compressions sont précédées du signe —.
Tirants issus de B_{n-1}....	$\frac{q\sqrt{h^2+a^2}}{2h}$	$\frac{q(h^2+a^2)}{2hR}$	2^n	$2^{n-1}\times\frac{q(h^2+a^2)}{hR}$	
Montants $A_{n-2}B_{n-2}$	$-2q$	$\frac{2qh}{R}$	2^{n-2}	$2^{n-1}\times\frac{qh}{R}$	
Tirants issus de B_{n-2}....	$\frac{\sqrt{h^2+2^2a^2}}{2h}$	$2q\,\frac{h^2+2^2a^2}{2hR}$	2^{n-1}	$2^{n-1}\times q\,\frac{(h^2+2^2a^2)}{hR}$	
Montants $A_{n-3}B_{n-3}$	-2^2q	$2^2\frac{qh}{R}$	2^{n-3}	$2^{n-1}\times\frac{qh}{R}$	
Tirants issus de B_{n-3}....	$\frac{2^2q\sqrt{h^2+2^4a^2}}{2h}$	$\frac{2^2q(h^2+2^4a^2)}{2hR}$	2^{n-2}	$2^{n-1}\times q\,\frac{(h^2+2^4a^2)}{hR}$	
....	....	....	....	....	
....	....	....	....	....	
Montants $A_{n-i}B_{n-i}$......	$-2^{i-1}q$	$2^{i-1}\frac{qh}{R}$	2^{n-i}	$2^{n-1}\times\frac{qh}{R}$	
Tirants issus de B_{n-i}....	$\frac{2^{i-1}q\sqrt{h^2+2^{2i-2}a^2}}{2h}$	$\frac{2^{i-1}q(a^2+2^{2i-2}a^2)}{2hR}$	2^{n-i+1}	$2^{n-1}\times q\,\frac{(h^2+2^{2i-2}a^2)}{hR}$	
....	....	....	.....	....	
....	....	....	.....	....	
Poinçon A_0B_0	$-2^{n-1}q$	$2^{n-1}\frac{qh}{R}$	$2^0=1$	$2^{n-1}\times\frac{qh}{R}$	
Tirants issus de B_0......	$\frac{2^{n-1}q\sqrt{h^2+2^{2n-2}a^2}}{2h}$	$\frac{2^{n-1}q(h^2+2^{2n-2}a^2)}{2hR}$	2	$2^{n-1}\times\frac{q(h^2+2^{2n-2}a^2)}{hR}$	

Si l'on fait la somme des volumes de la colonne (5) on trouve :

1° Pour le volume total v_1 des poinçons,

$$v_1 = n \times 2^{n-1} \times \frac{qh}{R} = \frac{Pnh}{2R};$$

2° Pour le volume total des tirants,

$$v_2 = n \times 2^{n-1} \times \frac{qh}{R} + \frac{2^{n-1} qa^2}{hR}(1 + 2^2 + 2^4 + \ldots + 2^{2n-2}),$$

ou, comme la parenthèse est une progression géométrique dont la raison est 2^2 ou 4,

$$v_2 = n \times 2^{n-1} \times \frac{qh}{R} + 2^{n-1}\frac{qa^2}{hR} \times \frac{2^{2n} - 1}{3}$$

ou

$$v_2 = \frac{P}{R}\left(\frac{hn}{2} + \frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{6} \times \frac{L^2}{h}\right).$$

Il nous reste à trouver le volume de la semelle. Or on remarquera que les tensions des barres aboutissant à l'un quelconque des points A_{n-i} donnent une résultante verticale; donc elles ne produisent aucun changement dans la tension de la semelle; cette tension est donc constante dans toute la longueur de la pièce, et elle est égale à la somme des composantes horizontales des tensions de tous les tirants issus de l'une de ses extrémités, de celle de A_1 par exemple. De ce point partent n tirants aboutissant à n points

$$B_0,\ B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{n-1}.$$

Or, par la colonne (2) du tableau précédent, on voit que la tension de chaque tirant issu de B_{n-i} est

$$\frac{2^{i-1} q\sqrt{h^2 + 2^{2i-2}a^2}}{2h};$$

le cosinus de l'angle que ce tirant fait avec la semelle est

$$\frac{2^{i-1}a}{\sqrt{h^2 + 2^{2i-2}a^2}}.$$

Donc la composante horizontale de cette tension est

$$2^{2i-2} \times \frac{qa}{2h},$$

et la somme de ces composantes, c'est-à-dire la tension de la semelle,

$$\frac{qa}{2h}(1+2^2+2^4+\ldots+2^{2n-2})=\frac{qa}{2h}\times\frac{2^{2n}-1}{3};$$

le volume de la semelle sera donc

$$v_3=\frac{qaL}{2hR}\times\frac{2^{2n}-1}{3}$$

ou

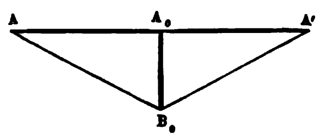
$$v_3=\frac{P}{R}\times\frac{1-\frac{1}{2^{2n}}}{6}\times\frac{L^2}{h};$$

d'où, pour le volume total V_p résultant de la charge permanente P,

$$(32)\qquad V_p=v_1+v_2+v_3=\frac{P}{R}\left(nh+\frac{1-\frac{1}{2^{2n}}}{3}\times\frac{L^2}{h}\right).$$

On voit que le volume augmente à mesure que n augmente : donc la poutre la plus économique serait celle pour laquelle $n=1$, c'est-à-dire un simple triangle (*fig.* B), avec un poinçon au milieu;

Fig. B.



mais c'est parce qu'il est impossible pour les grandes portées d'avoir une longue semelle AA', comprimée sans être soutenue contre la flexion, qu'on a imaginé des armatures plus complexes. On doit donc regarder n comme une quantité donnée, ou à peu près, par les nécessités de la pratique. Si alors la hauteur h de la poutre n'est pas fixée, on peut la prendre de façon que le volume ci-dessus devienne minimum : c'est ce qui a lieu pour

$$n-\frac{1-\frac{1}{2^{2n}}}{3}\times\frac{L^2}{h^2}=0$$

ou

(33) $$\frac{h}{L} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{3n}}.$$

Nous ne nous arrêterons pas, quant à présent, à la discussion de cette formule et d'autres que l'on pourrait tirer de l'expression (32). Nous trouverons des équations analogues pour les autres poutres que nous étudierons, et nous discuterons toutes ces équations d'ensemble.

§ 23.

Charge roulante. — Cherchons maintenant le volume de matière nécessaire pour résister à une charge roulante Q, *dans quelque position qu'elle occupe*, lorsqu'elle franchit la poutre, ainsi que les tensions maxima qu'une telle charge développe dans les diverses barres.

Comme d'un quelconque des points A_{n-1} ne part qu'un montant vertical, si un tel point porte une charge Q, il la transmet intégralement au montant, et elle se décompose ensuite suivant les deux tirants issus de l'extrémité de ce montant. Aux autres points A_{n-1}, les tensions des montants sont nulles, et, par suite, il en est de même des tensions aux points correspondants B_{n-1}. Des deux tirants qui aboutissent en l'un des deux points A_{n-2} les plus voisins du point chargé A_{n-1}, l'un ne porte rien comme émanant d'un point B_{n-1}, et, par suite, la tension de l'autre se décompose en une force verticale suivant le montant, et en une force horizontale suivant la semelle. La première, comme il est aisé de le voir, est $\frac{Q}{2}$; donc les pièces issues du point que nous considérons sont moins fatiguées que celles issues du point portant actuellement la charge roulante, et à mesure qu'on s'éloigne de ce dernier point l'influence de la charge se fera de moins en moins sentir, comme on devait s'y attendre.

Supposons maintenant la charge Q appliquée généralement à un des 2^i points A_{n-i}. On voit facilement, si l'on cherche les tensions des diverses barres, en commençant, comme nous l'avons fait plus haut, par celles issues des points A_{n-1} et B_{n-1}, puis passant à celle

issues de A_{n-2} et B_{n-2}, et ainsi de suite, que les tensions de toutes les barres issues des points

$$\begin{array}{lllll} A_{n-1}, & A_{n-2}, & A_{n-3}, & \ldots, & A_{n-i+1}, \\ B_{n-1}, & B_{n-2}, & B_{n-3}, & \ldots, & B_{n-i+1} \end{array}$$

sont nulles. Cela fait comprendre de suite que c'est, en somme, un assez mauvais système de charpente que celui-ci, puisque les pièces qui le composent sont si peu solidarisées, qu'à chaque instant, lors du passage d'une charge roulante, une fraction importante des pièces reste absolument inactive: d'où résulte nécessairement que les autres pièces sont surchargées; et, comme la charge se porte successivement sur toutes les parties de la poutre, chaque barre va se trouver ainsi, tantôt travaillant avec excès, tantôt inactive.

Des pièces qui aboutissent au sommet chargé lui-même et qui, elles du moins, devraient toutes concourir à supporter la charge, celles qui aboutissent à des points ayant un indice supérieur à $n - i$ ne travaillent pas : donc toute la charge est reportée, par le montant vertical $A_{n-i}B_{n-i}$, sur les deux tirants issus du point B_{n-i} et de ceux-ci sur la semelle. Ainsi, lors du passage d'une charge roulante, il n'y a à chaque instant, au point même occupé par la charge, que quatre pièces qui travaillent :

1° Le montant vertical supporte la charge Q;

2° Les deux tirants B_{n-i} supportent chacun

$$\frac{Q\sqrt{h^2 + 2^{2i-2}a^2}}{2h},$$

et la semelle une pression

$$2^{i-1} \times \frac{Qa}{2h}.$$

Il résulte de là que le volume v'_1 des montants verticaux au nombre de $2^n - 1$ doit être

$$v'_1 = \frac{(2^n - 1)Qh}{R},$$

le volume des deux tirants issus de B_{n-i}

$$\frac{Q(h^2 + 2^{2i-2}a^2)}{hR},$$

et le volume total des paires de tirants au nombre de $2^n - i$

$$v'_2 = \frac{Q}{R}\left[(2^n - 1)h + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{2} \times \frac{L^2}{h}\right].$$

Il nous reste à calculer le volume de la semelle. Il est clair qu'elle supportera la plus grande tension au moment où la charge passera au milieu de la pièce.

La tension sera alors

$$-\frac{QL}{4h},$$

son volume

$$v = \frac{QL^2}{4hR};$$

par suite, le volume total de matière V_q nécessaire pour porter une charge roulante, *dans quelque position qu'elle puisse occuper sur la poutre,* sera

$$(34) \qquad V_q = v'_1 + v'_2 + v'_3 = \frac{Q}{R}\left[2(2^n - 1)h + \frac{3 - \frac{1}{2^{n-1}}}{4} \times \frac{L^2}{h}\right].$$

§ 24.

Si l'on suppose la charge appliquée aux points B_0, B_1, B_2, ..., au lieu de l'être sur la semelle, alors les poinçons A_iB_i ne servent plus qu'à empêcher la flexion de la semelle; théoriquement, leur section est nulle.

Dans cette hypothèse, il faut des volumes V_p et V_q retrancher les volumes v_1, v'_1 trouvés pour ces poinçons. Il en résulte

$$(34\ bis) \qquad \begin{cases} V_p = \dfrac{P}{R}\left[\dfrac{nh}{2} + \dfrac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{3} \times \dfrac{L^2}{h}\right], \\ V_q = \dfrac{Q}{R}\left[(2^n - 1)h + \dfrac{3 - \frac{1}{2^{n-1}}}{4} \times \dfrac{L^2}{h}\right]. \end{cases}$$

Dès que n est supérieur à 3, le volume de matière nécessaire pour porter une charge *permanente* est fourni sensiblement par la formule très simple et très remarquable

$$(35) \qquad V_p = \frac{PL^2}{3hR}.$$

§ 25.

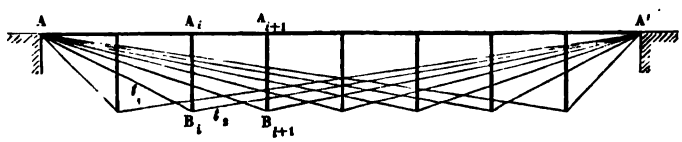
Pour avoir le volume V de matière nécessaire pour porter simultanément une charge permanente et une surcharge, celle-ci dans toutes les positions qu'elle peut occuper, il suffit d'ajouter les volumes V_p et V_q, afférents à chacune de ces charges, c'est-à-dire que

(36) $$V = V_p + V_q.$$

§ 26.

SYSTÈME BOLLMAN. — Description. — Une semelle unique AA', divisée en m parties égales (*fig.* C); aux points de division, des

Fig. C.



poinçons de hauteur constante A_iB_i; l'extrémité de chaque poinçon reliée aux deux extrémités de la semelle par deux tirants.

§ 27.

Charge permanente. — Cherchons d'abord le volume de matière nécessaire pour porter la charge permanente.

Nous appelons toujours L la longueur de la semelle, p la charge permanente par mètre, en sorte que la charge permanente totale est

$$P = pL.$$

Sur chaque poinçon A_iB_i repose une charge

$$q = \frac{P}{m}$$

et, aux deux points extrêmes A et A', une charge égale à $\frac{q}{2}$.

Il en résulte que la réaction de chaque appui est

$$R = \frac{P}{2} - \frac{P}{2m} = \frac{P}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\right).$$

La distance entre deux points de division consécutifs A_i et A_{i+1} est

$$a = \frac{L}{m}.$$

Considérons le poinçon A_iB_i occupant le $i^{ième}$ rang à partir de la gauche. La charge q se reporte évidemment tout entière sur ce poinçon, qui subit une compression q et a pour volume

$$\frac{qh}{R}.$$

Le volume total des poinçons, au nombre de $m-1$, est donc

$$v_1 = (m-1)\frac{qh}{R} = \frac{m-1}{m} \times \frac{Ph}{R}.$$

Les tensions t_1 et t_2 des tirants issus de B_i s'obtiennent en décomposant la force q suivant la direction de ces tirants, ce qui donne, en observant que $AA_i = ia$ et $A_1A_i = (m-i)a$,

$$t_1 = \frac{qa}{Lh}(m-i)\sqrt{h^2 + i^2a^2},$$

$$t_2 = \frac{qai}{Lh}\sqrt{h^2 + (m-i)^2a^2}.$$

Les volumes des deux tirants sont donc

$$\frac{qa}{RLh}(m-i)(h^2 + a^2i^2),$$

$$\frac{qa}{RLh} \times i[h^2 + (m-i^2)a^2],$$

et la somme de ces deux volumes

$$\frac{qam}{RLh}[h^2 + i(m-i)a^2] = \frac{q}{Rh}[h^2 + i(m-i)a^2];$$

d'où, pour le volume total v_2 de toutes les paires de tirants, au nombre de $m-1$,

$$v_2 = \frac{q}{Rh}\left\{(m-1)h^2 + a^2\left[\frac{m^2(m-1)}{2} - \frac{(m-1)m(2m-1)}{6}\right]\right\}$$

ou

$$v_2 = \frac{q(m-1)}{Rh}\left[h^2 + \frac{m(m+1)}{6}a^2\right]$$

ou

$$v_2 = \frac{P}{R} \times \frac{m-1}{m}\left(h + \frac{m+1}{6m} \times \frac{L^2}{h}\right).$$

Maintenant, la tension développée dans la semelle par les barres issues de B_i est la projection de t_1 ou de t_2 sur la semelle, soit

$$\frac{qi(m-i)a^2}{Lh}.$$

La tension totale de la semelle est la somme des termes semblables où i varie de $m - 1$, somme égale à

$$\frac{qa^2}{Lh}\left[\frac{m^2(m-1)}{2} - \frac{(m-1)m(2m-1)}{6}\right]$$

ou

$$\frac{qa^2 m}{6Lh}(m^2 - 1)$$

ou

$$\frac{PL}{6h} \times \frac{m^2-1}{m^2}.$$

Le volume de la semelle sera donc

$$v_3 = \frac{PL^2}{6Rh} \times \frac{m^2-1}{m^2};$$

d'où, pour le volume total V_p de matière nécessaire pour résister à la charge permanente,

$$(37) \qquad V_p = v_1 + v_2 + v_3 = \frac{P}{R} \times \frac{m-1}{m}\left(2h + \frac{m+1}{3m} \times \frac{L^2}{h}\right).$$

§ 28.

CHARGE ROULANTE. — Lorsque la charge roulante Q passe sur un poinçon A_iB_i, elle produit le même effet que si le triangle AB_iA', avec le poinçon A_iB_i, résistait seul. On en déduit facilement, en raisonnant comme dans le cas de la charge permanente, que le volume V_q nécessaire pour porter la charge Q, dans quelque

position que ce soit, est donné par la formule

$$(38)\qquad V_q = \frac{Q}{R} \times (m-1)\left(2h + \frac{m+1}{3m} \times \frac{L^2}{h}\right);$$

d'où, pour le volume total V de matière nécessaire pour résister à la fois à la charge permanente et à la charge roulante,

$$(39)\qquad V = V_p + V_q$$

ou

$$(40)\qquad V = \frac{m-1}{R}\left(\frac{P}{m} + Q\right)\left(2h + \frac{m+1}{3m} \times \frac{L^2}{h}\right).$$

Ce volume devient minimum, *quel que soit le rapport entre la charge permanente et la charge roulante,* pour

$$(41)\qquad h = \frac{L}{m}\sqrt{\frac{m(m+1)}{6}},$$

d'où

$$(42)\qquad V = \frac{4L(m-1)}{Rm}\left(\frac{P}{m} + Q\right)\sqrt{\frac{m(m+1)}{6}}.$$

Pour

$$m = 2,\qquad \frac{h}{L} = 0{,}50,\qquad V = \frac{2L}{R}\left(\frac{P}{2} + Q\right),$$

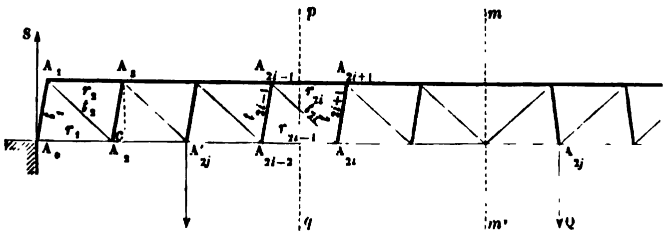
$$m = 3,\qquad \frac{h}{L} = 0{,}47,\qquad V = 3{,}76\,\frac{L}{R}\left(\frac{P}{3} + Q\right).$$

On voit que le volume augmente rapidement quand le nombre m des divisions augmente ; mais ce nombre de divisions est, comme nous l'avons déjà dit, commandé, pour chaque valeur de la portée L, par la condition de ne pas avoir des parties trop longues de la semelle soumises à la compression et par suite exposées à fléchir ; mais, la valeur de m une fois admise, le rapport $\frac{h}{L}$ de la hauteur de la poutre à sa portée qui donne la plus grande économie de matière est celui que donne la formule (41) ; souvent la valeur fournie par ce rapport dépasse ce que l'on a jusqu'ici admis dans la pratique ; il convient alors de s'en rapprocher le plus possible ; mais ne nous arrêtons pas quant à présent à cette discussion, qui sera mieux à sa place plus loin.

§ 29.

SYSTÈMES A TRIANGLES ET EN PARTICULIER SYSTÈME WARREN. — Description. — Considérons maintenant (*fig.* D) une poutre formée de $2n$ triangles tels que $A_0A_1A_2$, tous égaux, mais d'ailleurs de *forme quelconque,* reposant sur deux appuis ayant entre eux un écartement L.

Fig. D.



Cette poutre est symétrique par rapport à la verticale mn passant par son milieu.

Nous appellerons

$$A_0,\quad A_2,\quad A_4,\quad \ldots,\quad A_{2i},\quad \ldots,\quad A_{2n}$$

les sommets inférieurs, ceux qui sont censés porter la charge;

$$r_2,\quad r_4,\quad \ldots,\quad r_{2(i-1)},\quad \ldots,\quad r_{2n-2}$$

les tensions des barres horizontales supérieures, c'est-à-dire opposées à ces sommets;

$$A_1,\quad A_3,\quad A_5,\quad \ldots,\quad A_{2i-i},\quad \ldots$$

les sommets supérieurs, et

$$r_1,\quad r_3,\quad r_5,\quad \ldots,\quad r_{2i-1},\quad \ldots$$

les tensions des barres horizontales inférieures; enfin

$$t_1,\quad t_3,\quad t_5,\quad \ldots,\quad t_{2i-1},\quad \ldots,\quad t_{2n-1}$$

les tensions des barres inclinées parallèles à la première, à partir

de la gauche;

$$t_2,\quad t_4,\quad t_6,\quad \ldots,\quad t_{2i},\quad \ldots\quad t_{2n}$$

celles des barres inclinées parallèles à la seconde, à partir de la gauche.

§ 30.

Pour trouver simplement les tensions des diverses barres d'une telle poutre, soit pour des charges comme celles que nous considérons, soit pour des charges quelconques, faisons-y une section verticale pq en un point quelconque d'une barre inclinée $A_{2i-1}A_{2i}$. Cette section coupe les trois barres dont les tensions sont représentées par

$$r_{2i},\quad t_{2i},\quad r_{2i-1}.$$

Ces tensions doivent faire équilibre à toutes les forces, y compris les réactions des appuis, appliquées entre la section pq et l'une des extrémités de la poutre, celle de gauche par exemple. Or, la Statique fournissant trois équations pour exprimer cet équilibre, les trois tensions r_{2i}, t_{2i}, r_{2i-1} se trouvent déterminées. On peut même trouver chacune d'elles séparément. En effet, si l'on exprime que la somme des moments de toutes les forces qui doivent se faire équilibre est nulle par rapport au point A_{2i-1}, comme les moments des deux tensions inconnues t_{2i} et r_{2i}, par rapport à ce point, sont nuls, on aura une équation où n'entrera que la seule inconnue r_{2i-1}; si, de même, on applique le théorème des moments aux points A_{2i}, on aura une équation où n'entrera que la seule inconnue r_{2i}. Enfin, si l'on projette les forces en équilibre sur une verticale, comme les projections des deux forces r_{2i} et r_{2i-1} sont nulles, on aura une équation ne contenant que la seule inconnue t_{2i}.

Si la section pq était faite entre les deux points A_{2i-2} et A_{2i-1}, on déterminerait de même les tensions t_{2i-1}.

Appelons généralement X_k et T_k le moment fléchissant relativement au sommet A_k et l'effort tranchant en ce point. En comptant positivement les forces descendantes, en comptant aussi positivement les moments des forces descendantes lorsqu'elles sont à gauche du centre des moments, on obtient immédiatement, par la

méthode que nous venons d'indiquer,

$$\begin{aligned} hr_{2i-1} + X_{2i-1} &= 0,\\ -hr_{2i} + X_{2i} &= 0,\\ t_{2i}\cos\alpha + T_{2i-1} &= 0,\\ -t_{2i-1}\cos\alpha' + T_{2i-2} &= 0, \end{aligned}$$

où h est la hauteur de la poutre α' et α les angles que les pièces A_0A_1 et A_1A_2 font avec la verticale.

Si l'on désigne par L la longueur de la semelle inférieure divisée en $2n$ parties égales

$$A_0A_1 = A_1A_3 = \ldots = \frac{L}{2n},$$

et que c désigne le segment de gauche de l'un des triangles égaux, tels que $A_0A_1A_2$, on aura

$$\cos\alpha' = \frac{h}{\sqrt{h^2+c^2}}, \qquad \cos\alpha = -\frac{h}{\sqrt{h^2+\left(\frac{L}{2n}-c\right)}},$$

d'où

$$(43)\quad \begin{cases} r_{2i-1} = -\dfrac{1}{h}X_{2i-1},\\ r_{2i} = \dfrac{1}{h}X_{2i},\\ t_{2i} = -\dfrac{1}{h}T_{2i-1}\sqrt{h^2+\left(\dfrac{L}{2n}-c\right)^2},\\ t_{2i-1} = \dfrac{1}{h}T_{2i-2}\sqrt{h^2+c^2}, \end{cases}$$

et cela quelles que soient les charges que porte la poutre.

§ 31.

CHARGE PERMANENTE. — Supposons d'abord que la poutre porte une charge permanente de p^{kg} par mètre courant sur la semelle inférieure, en sorte que la charge totale soit

$$P = pL.$$

Chacun des sommets, sauf les deux extrêmes, portera

$$q = \frac{pL}{2n} = \frac{P}{2n},$$

et chacun des deux sommets extrêmes portera $\frac{q}{2}$, en sorte que les réactions des appuis sont

$$S = \frac{P}{2} - \frac{q}{2} = \frac{P}{2}\left(1 - \frac{1}{2n}\right).$$

En appliquant les formules générales du paragraphe précédent, on trouve sans difficulté

$$(43') \quad \left\{ \begin{aligned} t_{2i-1} &= \frac{P\sqrt{h^2+c^2}}{2h}\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{i}{n}\right), \\ t_{2i} &= \frac{P\sqrt{h^2 + \left(\frac{L}{2n} - c\right)^2}}{2h}\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{i}{n}\right), \\ r_{2i-1} &= \frac{PL}{4nh}(i-1)\left(1 - \frac{i-1}{2n}\right) + \frac{Pc}{2h}\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{i}{n}\right), \\ r_{2i} &= \frac{PL}{4nh} i\left(1 - \frac{i}{2n}\right). \end{aligned} \right.$$

Maintenant, si R est la tension ou la pression que l'on veut faire supporter à la matière (nous supposons toujours qu'elle résiste également bien à l'extension ou à la compression), la section d'une barre qui supporte une tension t_{2i-1} est $\frac{t_{2i-1}}{R}$, et son volume $\frac{t_{2i-1}}{R}\sqrt{h^2 + c^2}$.

Donc la somme des volumes des barres parallèles à celles de gauche sera

$$v_1 = 2\sum_{i=1}^{i=n} \frac{t_{2i-1}\sqrt{h^2+c^2}}{R} = \frac{P(h^2+c^2)}{Rh}\sum_{i=1}^{i=n}\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{n}{i}\right) = \frac{Pn(h^2+c^2)}{2Rh}.$$

On trouverait de même, pour le volume v_2 des barres inclinées parallèles à la seconde à partir de la gauche,

$$v_2 = \frac{Pn\left[h^2 + \left(\frac{L}{2n} - c\right)^2\right]}{2Rh};$$

pour le volume des barres horizontales inférieures,

$$w_1 = 2\sum_{i=1}^{i=n} \frac{L}{2n}\,\frac{r_{2i-1}}{R}$$

$$= \frac{PL^2}{4n^2Rh}\sum_{i=1}^{i=n}(i-1)\left(1-\frac{i-1}{2n}\right) + \frac{PcL}{2nhR}\sum_{i=1}^{i=n}\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{i}{n}\right)$$

ou

$$w_1 = \frac{PL^2(n-1)(4n+1)}{48n^2Rh} + \frac{PcL}{4hR},$$

et enfin, pour le volume w_2 des barres supérieures,

$$w_1 = \frac{PL^2(n-1)(4n+1)}{48n^2Rh} + \frac{PL}{4Rh}\left(\frac{L}{2n}-c\right);$$

d'où, pour le volume total V_p de matière nécessaire pour résister à la charge permanente,

$$V_p = v_1 + v_2 + w_1 + w_2,$$

$$V_p = \frac{Pn}{2Rh}\left(2h^2 + 2c^2 - \frac{cL}{n} + \frac{L^2}{4n^2}\right) + \frac{PL^2}{24n^2Rh}[(n-1)(4n+1)+3n]$$

ou

$$(44)\qquad V_p = \frac{P}{R}\left[nh + \frac{L^2(n+1)(4n-1) - 12cn^2L + 24c^2n^3}{24n^2h}\right],$$

ou

$$(45)\qquad V_p = \frac{P}{R}\left[nh + \frac{L^2(n+1)(4n-1) - 24n^3c\left(\frac{L}{2n}-c\right)}{24n^2h}\right].$$

Le produit $c\left(\frac{L}{2n}-c\right)$ devient maximum pour

$$c = \frac{L}{4n},$$

et alors le volume V_p devient minimum. Ainsi :

THÉORÈME. — *Quel que soit le nombre des triangles et quel que soit le rapport $\frac{h}{L}$ de la hauteur de la poutre à sa portée, les triangles isoscèles sont plus favorables à la résistance que les autres, lorsque la charge à supporter est uniformément répartie sur toute la longueur de la poutre.*

Et l'on a alors

$$(46) \qquad V_p = \frac{P}{R}\left(nh + \frac{8n^2+3n-2}{48n^2h}L^2\right).$$

Ce théorème est loin d'être évident, et, comme nous le verrons, il n'a pas lieu pour une charge roulante.

Pour $c = 0$, ainsi que pour $c = \frac{L}{2n}$, on obtient le même volume

$$(47) \qquad V_p = \frac{P}{R}\left[nh + \frac{L^2(n+1)(4n-1)}{24n^2h}\right].$$

En comparant ces volumes pour $n = 1$, par exemple, on trouve

Triangles isoscèles...... $V_p = \frac{PL}{R}\left(h + \frac{3L^2}{16h}\right)$,

Triangles rectangles.... $V'_p = \frac{PL}{R}\left(h + \frac{3L^2}{4h}\right)$.

Pour

$$\frac{h}{L} = \frac{1}{10},$$

$$V_p = \frac{PL^2}{R}\left(\frac{1}{10} + \frac{30}{16}\right) = 1,97\frac{PL^2}{R} \text{ environ,}$$

$$V'_p = \frac{PL^2}{R}\left(\frac{1}{10} + \frac{10}{4}\right) = 2,60\frac{PL^2}{R}.$$

On voit donc qu'à prendre les triangles rectangles on perd $\frac{2,60-1,97}{1,97} = \frac{0,63}{1,97}$, égal à près de 33 pour 100 du volume de matière.

On peut aussi chercher, pour une valeur donnée de n, la valeur de h qui rend V_p minimum, etc.; nous ne nous arrêterons pas quant à présent à ces discussions, sur lesquelles nous reviendrons.

§ 32.

CHARGE ROULANTE. — Considérons maintenant (*fig.* D, p. 279) une charge roulante Q au moment où elle est appliquée au point A_{2j}. La réaction sur l'appui sera $Q\left(1 - \frac{j}{2n}\right)$.

Il en résulte, en appliquant les formules (43) du § 30 et ne s'occupant que des valeurs absolues des tensions :

1° Si $j > i - 1$,

$$t_{2i-1} = \frac{Q\sqrt{h^2+c^2}}{h}\left(1 - \frac{j}{2n}\right);$$

2° Si $j \leqq i - 1$,

$$t'_{2i-1} = \frac{Q\sqrt{h^2+c^2}}{h} \times \frac{j}{2n}.$$

Donnons à la charge roulante Q la position qui donne à la tension la plus grande valeur possible.

Les deux plus grandes valeurs de t_{2i-1} et de t'_{2i-1} ont lieu, la première pour $j = i$, et la seconde pour $j = i - 1$, d'où

$$t_{2i-1} = \frac{Q\sqrt{h^2+c^2}}{h}\left(1 - \frac{i}{2n}\right),$$

$$t'_{2i-1} = \frac{Q\sqrt{h^2+c^2}}{h} \times \frac{i-1}{2n}.$$

Il faut prendre la plus grande de ces deux valeurs, c'est-à-dire la première; car, dans la moitié de la poutre que nous considérons (la seconde moitié étant symétrique, il est inutile de s'en occuper), i est inférieur ou au plus égal à n; d'où résulte

$$1 - \frac{i}{2n} > \frac{i-1}{2n}.$$

Cela signifie que le moment où la charge roulante produit la plus grande tension de la barre inclinée est celui où elle atteint l'extrémité inférieure de cette barre. Il résulte de là que le volume v'_1 des barres parallèles à la première de gauche est

$$v'_1 = \frac{2\sqrt{h^2+c^2}}{hR}\sum_{i=1}^{i=n} t_{2i-1}$$

ou

$$v'_1 = \frac{2Q(h^2+c^2)}{hR}\sum_{i=1}^{i=n}\left(1 - \frac{i}{2n}\right)$$

ou

$$v'_1 = \frac{Q(h^2+c^2)(3n-1)}{2hR}.$$

On trouverait de même, pour les volumes des barres parallèles

à la seconde à partir de la gauche,

$$v'_2 = \frac{Q\left[h^2+\left(\frac{L}{2n}-c\right)^2\right](3n-1)}{2hR}.$$

La tension r_{2i-1} est donnée pour l'une des deux formules

$$r_{2i-1} = \frac{Q}{h}\left(1-\frac{j}{2n}\right)\left[c+\frac{L(i-1)}{2n}\right] \quad \text{si} \quad j > i-1,$$

$$r'_{2i-1} = \frac{Q}{h}\left\{\left(1-\frac{j}{2n}\right)\left[c+\frac{L(i-1)}{2n}\right]-\left[c+\frac{L(i-1-j)}{2n}\right]\right\} \quad \text{si} \quad j \leqq i-1.$$

Ces deux expressions atteignent leurs plus grandes valeurs, la première pour $j = i$, et la seconde pour $j = i - 1$, c'est-à-dire que la tension r_{2i-1} d'une barre inférieure est la plus grande possible, quand le poids Q est placé à l'une de ses extrémités. Il faut chercher laquelle. Or on trouve, pour les deux valeurs indiquées de j,

$$r_{2i-1} = \frac{Q}{h}\left(1-\frac{i}{2n}\right)\left[c+\frac{L(i-1)}{2n}\right],$$

$$r'_{2i-1} = \frac{Q}{h}\left\{\left(1-\frac{i-1}{2n}\right)\left[c+\frac{L(i-1)}{2n}\right]-c\right\},$$

$$= r_{2i-1} - \frac{Q}{h}\left[c\left(1-\frac{1}{2n}\right)-\frac{L(i-1)}{4n^2}\right].$$

Il faut prendre, pour chaque barre, la plus grande de ces valeurs. C'est r_{2i-1} ou r'_{2i-1}, suivant que

$$c\left(1-\frac{1}{2n}\right) \gtrless \frac{L(i-1)}{4n^2}$$

ou

$$c \gtrless \frac{L}{4n} \times \frac{i-1}{n-\frac{1}{2}};$$

i peut prendre toutes les valeurs entières de 1 à n; donc, si

$$(48) \qquad c > \frac{L}{4n} \times \frac{n-1}{n-\frac{1}{2}},$$

on aura, pour toutes les valeurs de i,

$$c > \frac{L}{4n} \times \frac{i-1}{n-\frac{1}{2}},$$

r_{2i-1} sera partout inférieur à r'_{2i-1} et le volume des barres infé-

rieures sera donné par la formule

$$w'_1 = 2\sum_{i=1}^{i=n} \times \frac{r_{2i-1}}{R} \times \frac{L}{2n} = \frac{QL}{nRh}\sum_{i=1}^{i=n}\left(1-\frac{i}{2n}\right)\left[c+\frac{L(i-1)}{2n}\right],$$

ou

$$w'_1 = \frac{QL^2}{12n^2Rh}(n-1)(2n-1)+\frac{QcL}{4nRh}(3n-1).$$

Si

$$(48\ bis)\qquad c < \frac{L}{4n} \times \frac{n-1}{n-\frac{1}{2}},$$

alors il existera un nombre entier $i=\lambda$, inférieur à n et tel que

$$(49)\qquad \lambda < 1+\frac{c\left(n-\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{L}{4n}\right)} < \lambda+1,$$

Pour les valeurs de i comprises entre 1 et λ inclusivement, r_{2i-1} sera plus grand que r'_{2i-1}; pour les valeurs de i supérieures à λ, on aura au contraire $r'_{2i-1} > r_{2i-1}$. Donc, dans ce cas, le volume w'_1 des barres inférieures sera donné par la formule

$$w'_1 = \frac{L}{nR}\left(\sum_{i=1}^{i=\lambda} r_{2i-1} + \sum_{i=\lambda+1}^{i=n} r'_{2i-1}\right)$$

ou

$$w'_1 = \frac{L}{nR}\left(\sum_{i=1}^{i=\lambda} r_{2i-1} + \sum_{i=\lambda+1}^{i=n}\left\{r_{2i-1}+\frac{Q}{h}\left[\frac{L(i-1)}{4n^2}-c\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right]\right\}\right)$$

ou

$$w'_1 = \frac{L}{nR}\sum_{i=1}^{i=n} r_{2i-1} + \frac{QL}{nRh}\sum_{i=\lambda+1}^{i=n}\left[\frac{L}{4n^2}(i-1)-c\left(1-\frac{1}{2n}\right)\right]$$

ou

$$w'_1 = w_1 + \frac{QL}{2nRh}(n-\lambda)\left[\frac{L}{4n^2}(n+\lambda-1)-c\left(2-\frac{1}{2n}\right)\right].$$

La plus grande valeur de la tension r_{2i} d'une barre supérieure a lieu, comme on le vérifie aisément par une discussion analogue, mais plus simple, quand le poids Q se trouve au point A_{2i} et a pour expression

$$r_{2i} = \frac{QL}{2nh}\left(1-\frac{i}{2n}\right)i;$$

d'où, pour le volume des barres supérieures,

$$w'_2 = \frac{QL^2}{2n^2Rh}\left[\sum_{i=1}^{i=n}\left(1-\frac{i}{2n}\right)i\right] - \frac{QcL}{2Rh}$$

ou

$$w'_2 = \frac{QL^2(n+1)(4n-1)}{24n^2Rh} - \frac{QcL}{2Rh}.$$

En réunissant les valeurs de v'_1, v'_2, w'_1, w'_2, on trouve, pour le volume V_q relatif à la charge roulante,

1° Si $c > \frac{L}{4n} \times \frac{n-1}{n-\frac{1}{2}}$,

$$(50) \quad V_q = \frac{Q}{R}\left[(3n-1)h + \frac{(n+1)(4n-1)L^2 - 3n(5n-1)cL + 12n^2c^2(3n-1)}{12n^2h}\right];$$

2° Si $c < \frac{L}{4n} \times \frac{n-1}{n-\frac{1}{2}}$,

$$(50\ bis) \quad V'_q = V_q + (n-\lambda)\left[(n+\lambda-1)\frac{L}{4n^2} - c\left(2-\frac{1}{n}\right)\right]\frac{QL}{2nRh}.$$

Si l'on fait varier c, la formule (48) montre que, quels que soient n, h et L, le volume V_q devient minimum pour

$$-3n(5n-1)L + 24n^2c(3n-1) = 0,$$

d'où

$$c = \frac{L}{4n} \times \frac{5n-1}{6n-2};$$

mais cette formule n'est applicable que si

$$c > \frac{L}{4n} \times \frac{n-1}{n-\frac{1}{2}}$$

ou

$$\frac{5n-1}{6n-2} > \frac{n-1}{n-\frac{1}{2}},$$

d'où

$$n < 4,$$

Pour

$$(51) \quad \begin{cases} n = 1, & c = \frac{L}{4n} \text{ triangle isoscèle}, \\ n = 2, & c = \frac{9}{10} \times \frac{L}{4n}, \\ n = 4, & c = \frac{19}{22} \times \frac{L}{4n}. \end{cases}$$

Ainsi l'on voit qu'ici ce ne sont plus toujours, comme lorsqu'il s'est agi de la charge permanente (§ 30), les triangles isoscèles qui fournissent les volumes minimum; mais ce sont des triangles qui s'en rapprochent de telle sorte que, pour supporter à la fois une charge permanente et une charge roulante, ce sont ces triangles qu'il convient d'adopter quand on n'a pas de raison spéciale de prendre une autre forme.

Considérons les trois cas intéressants

$$c = 0, \qquad c = \frac{L}{4n}, \qquad c = \frac{L}{2n}.$$

Dans les deux derniers, on a

$$c > \frac{L}{4n} \times \frac{n-1}{n-\frac{1}{2}};$$

il faut donc employer la formule (50 *bis*); dans le premier, il faut employer la formule (50) en y faisant $\lambda = 1$, comme le montrent les inégalités (49). On trouve alors :

$c = 0$. Triangles rectangles descendants (*fig.* K ci-après),

$$V_q = \frac{Q}{R}\left[(3n-1)h + \frac{8n^2+9n-5}{24n^2h}L^2\right];$$

$c = \frac{L}{4n}$. Triangles isoscèles (*fig.* G, ci-après),

$$V_q = \frac{Q}{R}\left[(3n-1)h + \frac{8n^2+3n-2}{24n^2h}L^2\right];$$

$c = \frac{L}{2n}$. Triangles rectangles ascendants (*fig.* H, ci-après),

$$V_q = \frac{Q}{R}\left[(3n-1)h + \frac{8n^2+9n-5}{24n^2h}L^2\right].$$

Il est remarquable qu'ici, comme dans le cas de la charge permanente, les triangles rectangles descendants et ascendants donnent lieu à la même dépense de matière.

V.

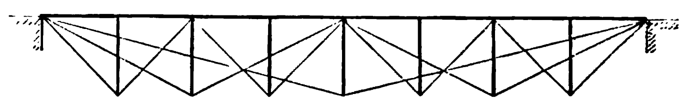
Conclusions pratiques.

§ 33.

En résumé, si L est la portée d'une poutre, h sa hauteur, si l'on appelle $\delta = \frac{h}{L}$ le rapport de la hauteur à la portée, on trouve, pour le volume V_p de matière nécessaire pour supporter une charge permanente $P = pL$ et pour le volume V_q nécessaire pour porter, *dans toutes les positions qu'elle peut occuper*, une charge roulante Q, les formules suivantes :

SYSTÈME FINK.

Fig. E.



Semelle divisée en 2^n parties égales, soit avec $2^n - 1$ montants verticaux.

Charge par-dessus, formules (32), § 22, et (34), § 23 :

$$(52) \qquad V_p = \frac{PL}{R}\left(n\delta + \frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{3\delta}\right),$$

$$(52\ bis) \qquad V_q = \frac{QL}{R}\left[2(2^n - 1)\delta + \frac{3 - \frac{1}{2^{n-1}}}{4\delta}\right]$$

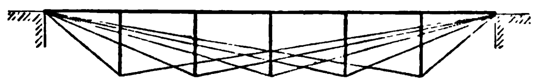
Charge par-dessous, formules (34 *bis*), § 24 :

$$(53) \qquad V_p = \frac{PL}{R}\left(\frac{n\delta}{2} + \frac{1 - \frac{1}{2^{2n}}}{3\delta}\right),$$

$$(53\ bis) \qquad V_q = \frac{QL}{R}\left[(2^n - 1)\delta + \frac{3 - \frac{1}{2^{n-1}}}{4\delta}\right].$$

SYSTÈME BOLLMAN.

Fig. F.



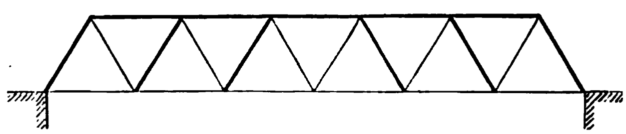
Divisée en $2n$ parties égales.

Charge par-dessus, formules (37), § 27, et (38), § 28, où l'on fera $m = 2n$:

$$(54)\quad \begin{cases} V_p = \dfrac{PL}{R}\left[\dfrac{2n-1}{n}\left(\delta + \dfrac{2n+1}{12n\delta}\right)\right], \\ V_q = 2\dfrac{QL}{R}(2n-1)\delta + \dfrac{2n+1}{12n\delta}. \end{cases}$$

SYSTÈME A TRIANGLES ISOSCÈLES (WARREN).

Fig. G.



Semelle inférieure divisée en $2n$ parties égales.

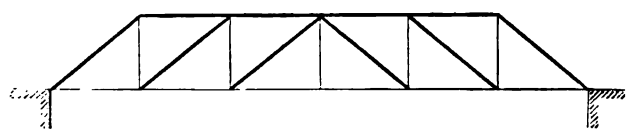
Charges par-dessous, formules (46), § 31, et (51 *bis*), § 32, où l'on fera $c = \dfrac{L}{4n}$:

$$(55)\qquad V_p = \frac{PL}{R}\left[n\delta + \frac{8n^2 + 3n - 2}{48n^2\delta}\right],$$

$$(55\ bis)\qquad V_q = \frac{QL}{R}\left[(3n-1)\delta + \frac{8n^2 + 3n - 2}{24n^2\delta}\right].$$

SYSTÈME A TRIANGLES RECTANGLES ASCENDANTS.

Fig. H.



Semelle inférieure divisée en $2n$ parties égales.

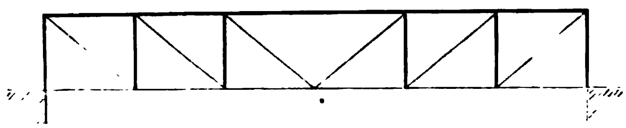
Charges par-dessous, formules (47), § 31, et (51 *bis*), § 32 :

$$(56) \quad V_p = \frac{PL}{R}\left[n\delta + \frac{(n+1)(4n-1)}{24n^2\delta}\right],$$

$$(56\ bis) \quad V_q = \frac{QL}{R}\left[(3n-1)\delta + \frac{8n^2+9n-5}{24n^2\delta}\right].$$

SYSTÈME A TRIANGLES RECTANGLES DESCENDANTS.

Fig. K.



Semelle inférieure divisée en $2n$ parties égales.

Mêmes formules que pour les triangles rectangles ascendants.

Dans le tableau qui suit (§ 35), nous avons calculé ces formules pour les cas où la semelle de longueur L, dans chacune des poutres considérées, est divisée en

2, 4, 8, 16, 32

parties égales. Ces divisions, étant des puissances du nombre 2, sont les seules que comporte le système Fink; nous les avons donc aussi adoptées pour les autres systèmes, afin de bien mettre en parallèle les divers systèmes. Elles correspondent :

1° Dans le cas du système Fink, aux valeurs

1, 2, 3, 4, 5

de n, puisque les divisions, dans cette poutre, sont au nombre de 2^n ;

2° Dans les autres systèmes, aux valeurs

1, 2, 4, 8, 16

de n, puisque, dans ces systèmes, le nombre des divisions est $2n$.

Pour chacune des valeurs de n, nous avons fait les calculs, en attribuant au rapport $\delta = \frac{h}{L}$ de la hauteur de la poutre à sa portée les quatre valeurs

$$\frac{1}{15}, \quad \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{4}.$$

Ces valeurs comprennent toutes celles généralement admises dans la pratique, qui, jusqu'ici du moins, s'est presque toujours tenue dans les limites comprises entre $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{15}$.

La première colonne porte les valeurs de δ; les autres colonnes fournissent, pour chaque système de poutre et pour chaque système de valeurs de n et de δ, les deux rapports

$$(57)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{V_p}{\left(\frac{PL}{R}\right)} &= \alpha, \\ \frac{V_q}{\left(\frac{QL}{R}\right)} &= \beta, \end{aligned}\right.$$

en sorte que le volume de matière V_p, nécessaire pour porter une charge P, uniformément répartie à raison de $\frac{P}{L}$ kilogrammes par mètre, et de telle sorte que chaque barre supporte une tension ou une pression de R^{kg} par mètre carré de section, est

$$(58)\qquad V_p = \alpha \frac{PL}{R},$$

et le volume de matière V_q, nécessaire pour porter une charge roulante Q, de telle façon que, *dans quelque position qu'elle occupe sur la poutre,* elle n'exerce sur aucune barre une tension ou une pression supérieure à R^{kg} par mètre carré, est

$$(59)\qquad V_q = \beta \frac{QL}{R},$$

et enfin le volume V de matière nécessaire pour porter à la fois les charges P et Q, sans que la tension ou pression par unité de surface dépasse jamais R^{kg}, est

$$(60)\qquad V = (\alpha P + \beta Q)\frac{L}{R}.$$

§ 34.

Chacun des coefficients α et β est, d'après les formules ci-dessus,

(52) et suivantes, de la forme

$$(61)\qquad \begin{cases} \alpha = A_0\delta + \dfrac{A_1}{\delta}, \\ \beta = B_0\delta + \dfrac{B_1}{\delta}, \end{cases}$$

les coefficients A_0, A_1, B_0, B_1 dépendant uniquement du nombre des divisions n. On a donc

$$(62)\qquad \begin{cases} V_p = \left(A_0\delta + \dfrac{A_1}{\delta}\right)\dfrac{PL}{R}, \\ V_q = \left(B_0\delta + \dfrac{B_1}{\delta}\right)\dfrac{QL}{R}, \end{cases}$$

et, en posant

$$(63)\qquad \frac{Q}{P} = \mu,$$

μ étant ainsi le rapport numérique de la surcharge à la charge permanente,

$$(64)\qquad V = \left[(A_0 + \mu B_0)\delta + \frac{A_1 + \mu B_1}{\delta}\right]\frac{PL}{R}.$$

De la simple inspection de ces formules, où $\delta = \frac{h}{L}$, il ressort cette conséquence importante, résultant de ce que, dans l'un des deux termes de chaque second membre, δ entre en numérateur et, dans l'autre, en dénominateur : *le volume de matière que dépense une poutre de système donné, pour résister à une charge donnée, ne diminue pas à mesure que la hauteur h de la poutre augmente; il existe, pour chaque poutre, une valeur de h qui rend ce volume minimum.*

C'est donc cette valeur qu'il faut adopter quand on le peut et dont, en tout cas, il faut se rapprocher le plus possible.

La valeur de δ, qui rend minimum le volume V_p relatif à la charge permanente, s'obtient en égalant à zéro la dérivée $\frac{dV_p}{d\delta}$, ce qui donne

$$A_0 - \frac{A_1}{\delta^2} = 0$$

ou

$$(65)\qquad \delta = \sqrt{\frac{A_1}{A_0}},$$

et le volume minimum correspondant est

$$V_p = 2\frac{PL}{R}\sqrt{A_1 A_0}. \tag{66}$$

La valeur de δ, qui rend minimum le volume V_q, relatif à la charge roulante, est

$$\delta = \sqrt{\frac{B_1}{B_0}}, \tag{67}$$

et la valeur correspondante du volume est

$$V_q = 2\frac{PL}{R}\sqrt{B_1 B_0}. \tag{68}$$

Dans le Tableau qui suit, on a calculé ces valeurs minima; ces valeurs, ainsi que celles du rapport δ auquel elles correspondent, sont marquées en chiffres *gras*.

La valeur de δ, qui rend minimum le volume V correspondant à la charge permanente et à la surcharge réunies, est

$$\delta = \sqrt{\frac{A_1 + \mu B_1}{A_0 + \mu B_0}}, \tag{69}$$

et le volume correspondant de matière est

$$V = 2\sqrt{(A_1 + \mu B_1)(A_0 + \mu B_0)}. \tag{70}$$

Ces valeurs dépendent, en général, du rapport μ entre la surcharge et la charge permanente; la valeur de δ n'est indépendante de ce rapport que dans le cas où

$$\frac{A_0}{A_1} = \frac{B_0}{B_1},$$

ce qui a lieu pour la poutre Bollman. En tout cas, la valeur de δ, donnant le minimum de V, se calcule sans difficulté, pour chaque système de poutres, au moyen des deux dernières formules.

§ 35.

Voici maintenant le Tableau des principales valeurs numériques de V_p et V_q, qu'il suffit d'ajouter pour avoir les valeurs correspondantes de V.

VALEURS de $\delta = \frac{h}{L}$.	SYSTÈME FINK. VALEURS DE $Vp : \frac{PL}{R} = \alpha$. Charge par-dessus.	SYSTÈME FINK. VALEURS DE $Vp : \frac{PL}{R} = \alpha$. Charge par-dessous.	SYSTÈME FINK. VALEURS DE $Vq : \frac{QL}{R} = \beta$. Charge par-dessus.	SYSTÈME FINK. VALEURS DE $Vq : \frac{QL}{R} = \beta$. Charge par-dessous.	SYSTÈME BOLLMAN. VALEURS DE $Vp : \frac{PL}{R} = \alpha$. Charge par-dessus.	SYSTÈME BOLLMAN. VALEURS DE $Vq : \frac{QL}{R} = \beta$. Charge par-dessus.
					SEMELLE DIVISÉE EN 2 PARTIES	
	$\delta + \frac{1}{4\delta}$	$\frac{\delta}{2} + \frac{1}{4\delta}$	$2\delta + \frac{1}{2\delta}$	$\delta + \frac{1}{2\delta}$	$\delta + \frac{1}{4\delta}$	$2\delta + \frac{1}{2\delta}$

Fig. *a*.

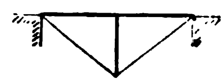
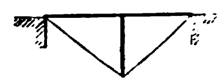


Fig. *b*.



δ	Fink Vp par-dessus	Fink Vp par-dessous	Fink Vq par-dessus	Fink Vq par-dessous	Bollman Vp	Bollman Vq
$\frac{1}{15} = 0,067$.	3,82	3,78	7,63	7,56	3,82	7,63
$\frac{1}{10} = 0,10$..	2,60	2,55	5,20	5,10	2,60	5,20
$\frac{1}{8} = 0,12$...	2,12	2,06	4,25	4,13	2,12	4,25
$\frac{1}{4} = 0,25$...	1,25	1,12	2,50	2,25	1,25	2,50
0,43.......	1,01	0,80	2,02	1,59	1,01	2,02
0,50.......	**1,00**	0,75	**2,00**	1,50	**1,00**	**2,00**
0,70.......	1,06	0,71	2,11	**1,41**	1,06	2,11
0,71.......	1,06	**0,71**	2,12	1,41	1,06	2,12
					SEMELLE DIVISÉE EN 4 PARTIES	
	$2\delta + \frac{5}{16\delta}$	$\delta + \frac{5}{16\delta}$	$6\delta + \frac{5}{8\delta}$	$3\delta + \frac{5}{8\delta}$	$\frac{3}{2}\left(\delta + \frac{5}{24\delta}\right)$	$3\left(2\delta + \frac{5}{12\delta}\right)$

Fig. *a'*.

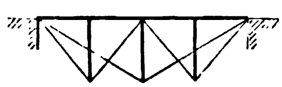
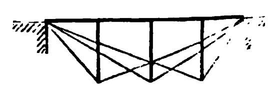
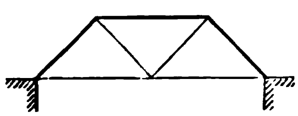
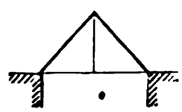
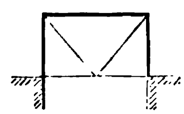
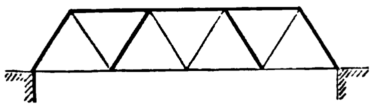
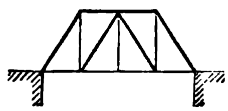
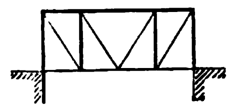


Fig. *b'*.



δ	Fink Vp par-dessus	Fink Vp par-dessous	Fink Vq par-dessus	Fink Vq par-dessous	Bollman Vp	Bollman Vq
$\frac{1}{15} = 0,067$.	4,82	4,75	9,77	9,57	4,79	19,15
$\frac{1}{10} = 0,10$..	3,32	3,22	6,85	6,55	3,27	13,10

Système WARREN			
A TRIANGLES ISOSCÈLES.		A ANGLES RECTANGLES ASCENDANTS OU DESCENDANTS.	
[V]ALEURS DE $\sqrt{p}: \frac{PL}{R} = \alpha$.	VALEURS DE $\sqrt{q}: \frac{QL}{R} = \beta$.	VALEURS DE $\sqrt{p}: \frac{PL}{R} = \alpha$.	VALEURS DE $\sqrt{q}: \frac{QL}{R} = \beta$.
Charge par-dessous.			
...[G]ALES, SOIT $n = 1$.			
$\delta + \frac{3}{16\delta}$	$2\delta + \frac{3}{8\delta}$	$\delta + \frac{1}{4\delta}$	$2\delta + \frac{1}{2\delta}$
Fig. *c*. 		Fig. *d*. 	Fig. *e*. 
2,88	5,76	3,82	7,63
1,97	3,95	2,60	5,20
1,62	3,25	2,12	4,25
1,00	2,00	1,25	2,50
0,87	**1,73**	1,02	2,02
0,87	1,75	**1,00**	**2,00**
0,97	1,93	1,06	2,11
0,97	1,95	1,06	2,12
...[G]ALES, SOIT $n = 2$.			
$2\delta + \frac{3}{16\delta}$	$5\delta + \frac{3}{8\delta}$	$2\delta + \frac{7}{32\delta}$	$5\delta + \frac{15}{32\delta}$
Fig. *c'*. 		Fig. *d'*. 	Fig. *e'*. 
2,95	5,96	3,41	7,36
2,07	4,25	2,39	5,19

VALEURS de $\delta = \frac{h}{L}$.	SYSTÈME FINK. VALEURS DE $Vp : \frac{PL}{R} = \alpha$. Charge par-dessus.	Charge par-dessous.	VALEURS DE $Vq : \frac{QL}{R} = \beta$. Charge par-dessus.	Charge par-dess[ous]
$\frac{1}{8} = 0,125$	2,75	2,62	5,75	[illegible]
$\frac{1}{4} = 0,25$	1,75	1,50	4,00	[illegible]
0,27............	1,70	1,43	3,93	3,12
0,30............	1,64	1,34	3,88	[illegible]
0,33............	1,62	1,29	**3,80**	[illegible]
0,39	**1,58**	1,19	3,94	[illegible]
0,43............	1,59	1,16	4,03	**2,74**
0,56............	1,68	**1,12**	4,48	[illegible]
			SEMELLE DIVISÉE EN 8 PARTIES ÉGALES	
	$3\delta + \frac{21}{64\delta}$	$\frac{3\delta}{2} + \frac{21}{64\delta}$	$14\delta + \frac{11}{16\delta}$	[illegible]
$\frac{1}{15} = 0,067$	5,12	5,02	11,24	[illegible]
$\frac{1}{10} = 0,10$	3,58	3,43	8,27	[illegible]
$\frac{1}{8} = 0,12$	3,00	2,82	7,25	[illegible]
0,18............	2,36	2,09	6,34	[illegible]
0,19.	2,30	2,01	6,28	[illegible]
0,20............	2,24	1,94	6,24	[illegible]
0,22............	2,15	1,82	**6,20**	[illegible]
$\frac{1}{4} = 0,25$	2,06	1,69	6,25	[illegible]
0,28............	2,01	1,59	6,37	[illegible]
0,33............	**1,98**	1,49	6,70	[illegible]
0,42............	2,04	1,33	7,52	[illegible]
0,47............	2,11	**1,40**	8,04	[illegible]
			SEMELLE DIVISÉE EN 16 PARTIES ÉGALES	
	$4\delta + \frac{85}{256\delta}$	$2\delta + \frac{85}{256\delta}$	$30\delta + \frac{23}{32\delta}$	[illegible]
$\frac{1}{15} = 0,067$	5,25	5,11	12,78	[illegible]

Système BOLLMAN.		Système WARREN			
		A triangles isoscèles.		A triangles rectangles ascendants ou descendants.	
Valeurs [de] $Vp : \frac{PL}{R} = \alpha$.	Valeurs de $Vq : \frac{QL}{R} = \beta$.	Valeurs de $Vp : \frac{PL}{R} = \alpha$.	Valeurs de $Vq : \frac{QL}{R} = \beta$.	Valeurs de $Vp : \frac{PL}{R} = \alpha$.	Valeurs de $Vq : \frac{QL}{R} = \beta$.
Charge par-dessus.		Charge par-dessous.			
2,69	10,74	1,75	3,62	2,00	4,37
1,62	6,50	1,25	2,75	1,37	3,12
1,56	6,25	1,23	**2,74**	1,35	3,09
1,49	5,96	**1,22**	2,75	1,33	**3,06**
1,44	5,77	1,23	2,79	**1,32**	3,07
1,39	5,54	1,26	2,91	1,34	3,15
1,37	**5,48**	1,30	3,02	1,37	3,24
1,40	5,59	1,45	3,47	1,51	3,64
FINK.................... $n = 3$.					
BOLLMAN et WARREN.. $n = 4$.					
$\frac{7}{4}\left(\delta + \frac{3}{16\delta}\right)$	$7\left(2\delta + \frac{3}{8\delta}\right)$	$4\delta + \frac{23}{128\delta}$	$11\delta + \frac{23}{64\delta}$	$4\delta + \frac{25}{128\delta}$	$11\delta + \frac{53}{128\delta}$
5,04	40,31	2,96	6,12	3,19	6,94
3,40	27,65	2,20	4,69	2,35	5,24
2,84	22,75	1,94	4,25	2,06	4,69
2,13	17,08	1,72	**3,98**	1,80	4,28
2,06	16,46	1,70	3,98	1,79	**4,27**
2,00	15,92	1,70	4,00	1,78	4,27
1,89	15,01	**1,70**	4,05	**1,77**	4,30
1,75	14,00	1,72	4,19	1,78	4,41
1,66	13,29	1,76	4,36	1,82	4,56
1,57	12,57	1,86	4,72	1,91	4,88
1,51	**12,12**	2,11	5,47	2,14	5,60
1,52	12,15	2,26	5,93	2,29	6,06
FINK.................... $n = 4$.					
BOLLMAN et WARREN.. $n = 8$.					
$\frac{5}{8}\left(\delta + \frac{17}{96\delta}\right)$	$15\left(2\delta + \frac{17}{48\delta}\right)$	$8\delta + \frac{89}{512\delta}$	$23\delta + \frac{89}{256\delta}$	$8\delta + \frac{93}{512\delta}$	$23\delta + \frac{193}{512\delta}$
5,10	81,67	3,14	6,75	3,26	7,19

VALEURS de $\delta = \frac{h}{L}$.	SYSTÈME FINK.			
	VALEURS DE $Vp : \frac{PL}{R} = \alpha$.		VALEURS DE $Vq : \frac{QL}{R} = \beta$.	
	Charge par-dessus.	Charge par-dessous.	Charge par-dessus.	Charge par-dessous.
$\frac{1}{10} = 0,10$	3,72	3,52	10,19	8,[illegible]
$\frac{1}{8} = 0,12$	3,16	2,91	9,50	7,[illegible]
0,13.............	3,07	2,81	9,43	7,[illegible]
0,14.............	2,93	2,65	9,33	7,[illegible]
0,15.............	2,81	2,51	9,29	7,0[illegible]
0,20.............	2,46	2,06	**9,28**	**6,[illegible]**
$\frac{1}{4} = 0,25$	2,33	1,83	10,37	6,62
0,28.............	**2,30**	1,74	10,97	6,[illegible]
0,40.............	2,43	**1,63**	13,80	7,[illegible]
0,42.............	2,47	1,63	14,31	[illegible]

SEMELLE DIVISÉE EN 32 PARTIES ÉGALES

	$5\delta + \frac{34}{1024\delta}$	$\frac{5\delta}{2} + \frac{341}{1024\delta}$	$62\delta + \frac{47}{64\delta}$	$31\delta -$ [illegible]
$\frac{1}{15} = 0,067$	5,33	5,16	15,15	13,[illegible]
0,08.............	4,46	4,56	13,32	11,[illegible]
0,09.............	4,15	3,92	13,74	10,[illegible]
$\mathbf{\frac{1}{10} = 0,10}$	3,83	3,58	**13,54**	10,[illegible]
$\frac{1}{8} = 0,12$.........	3,29	2,98	13,62	9,[illegible]
0,13.............	3,21	2,89	13,81	**[illegible]**
$\mathbf{\frac{1}{4} = 0,25}$	**2,58**	1,96	18,44	10,[illegible]
0,36.............	2,72	**1,82**	24,36	13,[illegible]
0,41.............	2,88	1,85	27,21	14,[illegible]

SYSTÈME BOLLMAN.		SYSTÈME WARREN			
		A TRIANGLES ISOSCÈLES.		A TRIANGLES RECTANGLES ASCENDANTS OU DESCENDANTS.	
VALEURS $Vp : \frac{PL}{R} = \alpha$.	VALEURS DE $Vq : \frac{QL}{R} = \beta$.	VALEURS DE $Vp : \frac{PL}{R} = \alpha$.	VALEURS DE $Vq : \frac{QL}{R} = \beta$.	VALEURS DE $Vp : \frac{PL}{R} = \alpha$.	VALEURS DE $Vq : \frac{QL}{R} = \beta$.
Charge par-dessus.		Charge par-dessous.			
3,51	56,10	2,54	5,78	2,61	6,07
2,89	46,24	2,39	5,66	2,45	5,89
2,80	44,76	2,38	**5,66**	2,44	**5,89**
2,63	42,09	**2,36**	5,70	2,42	5,91
2,50	39,90	2,36	5,77	**2,41**	5,96
2,03	32,55	2,47	6,34	2,51	6,48
1,80	28,74	2,69	7,14	2,72	7,26
1,71	27,36	2,86	7,68	2,89	7,79
1,58	25,26	3,63	10,07	3,65	10,14
1,58	**25,23**	3,77	10,49	3,79	10,55

NK.................... $n = 5$.
)LLMAN ET WARREN.. $n = 16$.

$\left(\delta - \frac{11}{64\delta}\right)$	$31\left(2\delta + \frac{11}{32\delta}\right)$	$16\delta + \frac{349}{2048\delta}$	$47\delta + \frac{349}{1024\delta}$	$16\delta + \frac{357}{2048\delta}$	$47\delta + \frac{729}{2048\delta}$
5,12	163,96	3,62	8,24	3,68	8,47
4,32	138,14	**3,21**	**8,02**	**3,46**	8,21
4,35	123,94	3,33	8,02	3,38	**8,18**
3,52	112,72	3,36	8,11	**3,34**	8,26
2,91	93,00	3,36	8,60	3,39	8,72
2,81	90,02	3,39	8,73	3,43	8,85
1,81	58,09	4,68	13,11	4,70	13,17
1,62	51,89	6,23	17,87	6,24	17,91
1,61	**51,47**	6,97	20,10	7,14	20,14

De ce Tableau et des divers théorèmes établis dans ce Mémoire ressortent les conséquences suivantes :

1° Quel que soit le système de poutre employé, le volume de matière à dépenser pour résister à une charge donnée ne diminue pas, comme on pourrait le croire, à mesure que la hauteur de la poutre augmente. Il existe, pour chaque système de poutre, une hauteur donnant lieu à la plus grande économie possible de matière. Ce sont ces hauteurs, indiquées en chiffres plus forts au Tableau précédent, qu'il faut adopter ou dont il convient au moins de se rapprocher le plus possible; en les dépassant, loin d'obtenir une économie, on augmente souvent la dépense dans des proportions qu'on soupçonnerait difficilement. Ainsi, pour la poutre à triangles isoscèles dont la semelle serait divisée en 32 parties égales, cette hauteur, la plus favorable pour porter une surcharge Q, est égale au $\frac{8}{100}$ de la portée L, hauteur, comme on le voit, très pratique; et la dépense de matière correspondante est $8{,}02 \times \frac{QL}{R}$; mais, si l'on s'avisait de porter cette hauteur au quart de la portée, la dépense de matière serait $13{,}11\,\frac{QL}{R}$; c'est-à-dire que, loin d'être moindre, elle serait presque doublée.

On remarquera, du reste, que, dès que le nombre des divisions de la semelle est un peu considérable, ce qui a toujours lieu pour les portées moyennes et grandes, les hauteurs les plus favorables varient du $\frac{1}{8}$ au $\frac{1}{12}$, et même du $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{12}$ de la portée. Il est remarquable que ces chiffres, indiqués par la théorie, soient précisément ceux que la pratique a consacrés; mais ce que les praticiens n'ont certainement pas remarqué, c'est qu'il y a, en général, à perdre et non à gagner à dépasser notablement ces hauteurs.

2° Quel que soit le système de poutre employé, le volume de matière à dépenser pour résister à une charge donnée, avec une poutre dont la hauteur et la portée restent les mêmes, croît rapidement avec le nombre des parties dans lesquelles on divise la semelle, c'est-à-dire avec n. Mais ce nombre n, comme nous l'avons déjà dit, est, dans la pratique, commandé, ou à peu près, par la nécessité de ne pas laisser des portions de semelles trop longues sans liaison avec le reste de la pièce, autrement ces portions de semelles fléchiraient sous l'action de leur poids et sous

l'action des charges roulantes. Ceci est surtout important quand la semelle est comprimée.

3° Si l'on compare les trois espèces de poutres (Fink, Bollman et Warren), pour un même système de valeurs de n et de δ, on voit que, pour la charge roulante, c'est toujours la poutre à triangles isoscèles qui l'emporte; pour la charge permanente, elle l'emporte aussi, sauf pour des valeurs très grandes de n et de δ; on peut déduire de là que, sauf de très rares exceptions que nos formules (63) et (64) indiqueront facilement, elle l'emportera aussi pour les deux charges réunies. Ainsi cette poutre doit être regardée comme supérieure aux systèmes Fink et Bollmann, à ce dernier surtout, qui est admissible pour des charges uniformes, mais qui, pour des charges roulantes, doit être absolument proscrit [1]; et en adoptant les poutres à triangles, ce ne sont pas des économies insignifiantes que l'on fait, mais des économies pouvant aller à 50 pour 100, et plus, du volume de matière employée.

Ainsi, pour une poutre dont la semelle serait divisée en 32 parties et dont la hauteur serait égale à $\frac{1}{15}$ de la portée, chiffre très usuel, il faut, pour porter une charge permanente P, les volumes de matière suivants :

Fink..................	$5,33\,\frac{PL}{R}$
Bollmann	$5,12\,\frac{PL}{R}$
Triangles isoscèles......	$3,62\,\frac{PL}{R}$
Triangles rectangles	$3,68\,\frac{PL}{R}$

c'est-à-dire que le système Bollmann exige 42 pour 100, et le système Fink 48 pour 100 de matière de plus que le système à triangles isoscèles.

(1) En réalité, dans la pratique, il n'y a pas de charges concentrées sur un point; les charges roulantes, telles que les trains de chemins de fer, se répartissent sur une longueur finie, c'est-à-dire, dans la poutre Bollmann, entre plusieurs paires de tirants; le désavantage que présente cette poutre est par là un peu atténué ; mais il n'en subsiste pas moins très considérable.

Pour porter, dans les mêmes conditions, la charge roulante Q, il faut :

Fink.................	$15,15 \frac{QL}{R}$
Bollmann.............	$163,96 \frac{QL}{R}$
Triangles isoscèles	$8,24 \frac{QL}{R}$
Triangles rectangles...	$8,47 \frac{QL}{R}$

c'est-à-dire que le système Fink exige 83 pour 100 de matière de plus que le système à triangles isoscèles; quant au système Bollman, nous n'en parlons pas: il nous semble tout à fait inadmissible dans ce cas.

Le système à triangles rectangles exige 3 pour 100 de matière de plus que celui à triangles isoscèles.

Nous ne prétendons pas que ces chiffres, rigoureux en théorie, le soient au même degré dans la pratique, puisque là il faut tenir compte encore du volume de matière que nécessitent les assemblages, les pièces destinées à empêcher la voilure des barres, etc.; mais ces chiffres indiquent, de façon à ne laisser subsister à cet égard aucun doute, les valeurs *relatives* des divers systèmes mis en parallèle; et même une fois qu'on aura déterminé par l'expérience, ce qui ne paraît pouvoir offrir aucune difficulté, les proportions dans lesquelles il convient d'augmenter les volumes théoriques ci-dessus trouvés pour tenir compte des pièces d'assemblage, de contreventement, etc., nos formules permettront de faire en quelques instants les devis comparatifs de divers systèmes de poutres et de choisir, dans chaque cas, le meilleur.

4° Si maintenant on compare les mêmes systèmes, non plus pour des valeurs données de n et de δ, mais au point de vue du *minimum* de dépense de matière dont chaque système est susceptible, pour résister à une charge donnée, avec un nombre donné de divisions de la semelle, on trouve encore que, presque toujours, l'avantage appartient à la poutre à triangles isoscèles, surtout si la charge roulante est considérable; pour la charge permanente seule, il n'en serait pas toujours ainsi et, pour ce genre de charges, la préférence devrait être donnée tantôt au système Fink, tantôt au système Bollman, tantôt au système à triangles; mais ce dernier

réalise, en général, le minimum de dépense avec de moindres hauteurs de poutres, ce qui, en pratique, le rendrait supérieur, même quand le volume minimum auquel il donne lieu dépasserait un peu celui relatif à une des deux autres poutres. Si, par exemple, on suppose seize divisions de la semelle, le minimum de matière nécessaire pour résister à une charge permanente est :

Fink................	$2,30\frac{PL}{R}$,	avec $\delta = \frac{h}{L} = 0,28$,
Bollmann............	$1,57\frac{PL}{R}$,	avec $\delta = \frac{h}{L} = 0,42$,
Triangles isoscèles....	$2,36\frac{PL}{R}$,	avec $\delta = \frac{h}{L} = 0,14$,
Triangles rectangles..	$2,41\frac{PL}{R}$,	avec $\delta = \frac{h}{L} = 0,15$.

Le système le plus économique serait le système Bollmann ; mais, pour arriver à réaliser l'économie qu'il offre, il faudrait construire une poutre dont la hauteur fût les $\frac{41}{100}$ de la portée, ce qui, pour des portées un peu considérables, serait inadmissible : l'avantage est donc ici purement théorique.

Vient ensuite le système Fink, qui dépense un volume de matière égal à $2,30\frac{PL}{R}$, avec une hauteur de poutre qui serait les $\frac{28}{100}$, c'est-à-dire plus du quart de la portée : c'est encore irréalisable pour de grandes portées.

Quant à la poutre à triangles isoscèles, elle dépense $2,36\frac{PL}{R}$ de matière, c'est-à-dire très peu plus que la poutre Fink, et elle dépense ce volume avec une hauteur de poutre à peine de moitié. Elle l'emportera donc, dans la pratique, même au point de vue où nous nous plaçons ici.

Si l'on fait maintenant les mêmes comparaisons pour une charge roulante Q, on trouve les dépenses minima de matière suivantes :

Fink..............	$8,36\frac{QL}{R}$,	avec $\delta = \frac{h}{L} = 0,13$,
Bollmann...........	$25,12\frac{QL}{R}$,	avec $\delta = \frac{h}{L} = 0,42$,
Triangles isoscèles...	$5,66\frac{QL}{R}$,	avec $\delta = \frac{h}{L} = 0,13$,
Triangles rectangles.	$5,86\frac{QL}{R}$,	avec $\delta = \frac{h}{L} = 0,13$.

Ici l'on voit, sans discussion, que l'avantage appartient au système à triangles isoscèles, avantage considérable puisqu'il donne, sur le système Fink, une économie de plus de 50 pour 100 de matière, avantage effectif, puisqu'il se produit moyennant une hauteur de poutre parfaitement pratique.

4° Ainsi, à quelque point de vue qu'on se place, le système à triangles est supérieur au point de vue économique au système Fink et plus encore au système Bollmann; d'un autre côté, nous avons vu, dans la théorie générale des systèmes d'égale résistance, qu'il est nécessairement plus économique que les systèmes à croix de Saint-André et à treillis; et il résulte aussi de cette théorie qu'il est plus économique que les systèmes Jones, Linville, Murphy-Whipple, etc., qui tous dérivent des systèmes à treillis ou à croix de Saint-André et contiennent les mêmes lignes surabondantes que ces derniers (seulement en moins grand nombre): nous pouvons donc conclure que la poutre à triangles, et en particulier celle à triangles isoscèles, est, au point de vue où nous nous sommes placé, la meilleure des poutres connues.

5° Il se peut qu'on découvre des systèmes mieux disposés encore; mais on devra, en tous cas, les chercher parmi les figures géométriques ne contenant pas de lignes surabondantes; car, étant donné un système à lignes surabondantes, on peut toujours (théorème V) trouver un système sans lignes surabondantes plus (ou pour le moins aussi) économique que lui (¹).

6° Si l'on ajoute à cela que les systèmes sans lignes surabondantes sont (théorème I) les seules dont les tensions puissent être calculées à l'aide des principes de la Statique élémentaire; que, par suite, les calculs sont plus sûrs et plus simples que ceux de la Résistance des matériaux; qu'ils peuvent d'ailleurs être remplacés par les procédés si commodes et si expéditifs de la Statique graphique; si l'on ajoute encore que les systèmes sans lignes surabondantes, par cela seul qu'ils renferment un moins grand nombre de pièces, comportent des pièces plus robustes, plus faciles à assembler, moins sujettes à être affaiblies par l'oxydation ou la

---

(¹) *Voir*, au sujet de l'emploi exclusif des systèmes sans lignes surabondantes, l'observation placée au bas de la page 201.

pourriture, moins sensibles aux trépidations, moins exposées à être faussées lors de la pose ou à être affamées par les pièces d'assemblage, on reconnaîtra qu'il y a véritablement intérêt, en cette matière, à se conformer aux préceptes de la théorie. Il est peu de questions où elle fournisse des résultats aussi simples, aussi conformes au bon sens, aussi faciles et aussi utiles à mettre en application.

APPENDICE A LA NOTE I.

SUR LES CAS D'EXCEPTION QUE PRÉSENTENT, AU POINT DE VUE CINÉMATIQUE OU MÉCANIQUE, LES SYSTÈMES ARTICULÉS.

§ 1.

A. — DÉFORMATIONS NORMALES ET ANORMALES DANS LES SYSTÈMES ARTICULÉS.

Si la figure géométrique formée par les axes d'un système plan de barres articulées peut recevoir un mouvement *fini et continu*, pendant lequel tous ses angles ou quelques-uns d'entre eux se modifient avec continuité, les longueurs de ses côtés restant invariables, nous disons qu'elle est *déformable*. Si, au contraire. il est impossible de modifier d'une façon *continue* les angles sans faire varier aussi les longueurs des côtés ou de quelques-uns d'entre eux, elle est dite *indéformable*.

Plusieurs déformations d'une figure seront dites *distinctes*, si aucune d'elles ne peut être obtenue par composition ou juxtaposition des mouvements formant les autres.

Nous avons vu que le nombre des côtés et le nombre des sommets ou points d'articulation d'une figure plane étant respectivement désignés par les lettres m et n :

1° Si

$$m = 2n - 3, \tag{1}$$

la connaissance des côtés entraîne celle des angles : une telle figure est donc indéformable.

2° A plus forte raison en est-il ainsi si la figure contient k lignes surabondantes ou k lignes de plus que le nombre nécessaire pour la définir de forme, c'est-à-dire si

$$m = 2n - 3 + k. \tag{2}$$

3° Si au contraire

$$(3) \qquad m = 2n - 3 - k,$$

c'est-à-dire si la figure contient k lignes de moins que le nombre nécessaire pour la définir, elle peut être déformée de k manières différentes.

Nous appellerons ces déformations les *déformations normales.* Ainsi une figure dont le nombre des côtés est défini par la dernière équation peut recevoir k *déformations normales;* tandis qu'une figure dont le nombre des côtés est défini par les équations (1) ou (2) est *normalement indéformable.*

Les angles d'une telle figure ne peuvent recevoir des altérations de grandeurs finies que si un ou plusieurs côtés sont eux-mêmes altérés de grandeurs finies et, *en général,* les mêmes angles ne peuvent recevoir des variations infiniment petites que si les côtés ou quelques-uns d'entre eux subissent des variations infiniment petites de *même ordre.*

Mais on conçoit qu'on puisse choisir les longueurs des côtés d'une figure indéformable dont le canevas général est donné, de telle façon que, ses angles variant de quantités infiniment petites, les variations correspondantes des côtés soient des infiniment petits d'un ordre plus élevé.

De pareilles modifications peuvent être regardées comme des *déformations infiniment petites,* puisque ce sont des mouvements pendant lesquels les longueurs des côtés peuvent être regardées comme invariables. Nous les appellerons des *déformations anormales.*

Il peut arriver aussi qu'une figure contenant k lignes de moins que le nombre nécessaire pour en définir les angles puisse, outre les k déformations finies et continues que nous avons appelées *normales,* recevoir une ou plusieurs déformations infiniment petites que nous appelons *anormales.*

§ 2.

RELATIONS NORMALES ET ANORMALES ENTRE LES DILATATIONS DES COTÉS D'UNE FIGURE. — Nous disons qu'une figure est librement dilatable lorsque tous ses côtés peuvent recevoir des dilatations infiniment petites, indépendantes les unes des autres.

Si, au contraire, entre les dilatations infiniment petites qu'il est possible de donner aux m côtés d'une figure, il existe k relations permettant de déduire les dilatations de k côtés de celles des $m-k$ autres, nous disons que la figure ne peut recevoir que $m-k$ dilatations distinctes.

C'est évidemment le cas d'une figure contenant k lignes surabondantes.

Soient

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_m$$

les longueurs des côtés d'une telle figure.

La connaissance de $m-k$ de ces grandeurs suffisant, par hypothèse, à définir la figure, il faut qu'il existe entre elles k relations.

Soit

$$F(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_m)=0 \tag{4}$$

l'une d'elles.

Supposons à présent qu'on donne aux divers côtés des dilatations infiniment petites

$$\delta a_1,\ \delta a_2,\ \ldots,\ \delta a_m.$$

Entre les côtés

$$a_1+\delta a_1,\quad a_2+\delta a_2,\quad \ldots,\quad a_m+\delta a_m$$

de la figure dilatée, on aura encore la relation précédente, pourvu qu'on y remplace les longueurs a_i par celles $a_i+\delta a_i$, de sorte qu'on aura identiquement

$$F(a_1+\delta a_1,\ a_2+\delta a_2,\ a_3+\delta a_3,\ a_m+\delta a_m)=0. \tag{4'}$$

Retranchant la première de ces équations de la seconde, négligeant les quantités de l'ordre du carré des dilatations et écrivant partout F au lieu de $F(a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_m)$, il viendra

$$\frac{\partial F}{\partial a_1}\delta a_1+\frac{\partial F}{\partial a_2}\delta a_2+\frac{\partial F}{\partial a_3}\delta a_3+\ldots+\frac{\partial F}{\partial a_m}\delta a_m=0. \tag{5}$$

Si l'on appelle

$$F_1=0,\qquad F_2=0,\qquad F_3=0,\qquad \ldots,\qquad F_k=0 \tag{6}$$

les k relations entre les longueurs des côtés de la figure donnée,

on aura entre leurs variations les k équations linéaires correspondantes

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial F_1}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial F_1}{\partial a_2}\delta a_2 + \frac{\partial F_1}{\partial a_3}\delta a_3 + \cdots + \frac{\partial F_1}{\partial a_m}\delta a_m = 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial F_2}{\partial a_2}\delta a_2 + \frac{\partial F_2}{\partial a_3}\delta a_3 + \cdots + \frac{\partial F_2}{\partial a_m}\delta a_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial F_k}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial F_k}{\partial a_2}\delta a_2 + \frac{\partial F_k}{\partial a_3}\delta a_3 + \cdots + \frac{\partial F_k}{\partial a_m}\delta a_m = 0. \end{array}\right.$$

Ces relations, nous les appellerons les relations *normales* entre les dilatations des côtés d'une figure à k lignes surabondantes. Si $k = 0$, c'est-à-dire si la figure contient $2n - 3$ côtés, et à plus forte raison si elle en contient un plus petit nombre, ces relations n'existent pas, de sorte que, en général, *une figure ne contenant pas de lignes surabondantes, c'est-à-dire une figure à n sommets contenant au plus $2n - 3$ côtés, est librement dilatable; tandis qu'une telle figure contenant $m = 2n - 3 + k$ côtés ne peut recevoir que $m - k$ dilatations distinctes.*

Mais il peut arriver qu'une figure ne contienne pas de lignes surabondantes, que, par suite, entre les *longueurs* de ses côtés, il n'existe aucune relation permettant de déduire quelques-uns d'entre eux de la connaissance des autres, et que néanmoins entre les dilatations qu'il est possible de donner à ces côtés il existe des relations nécessaires de la forme

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} A_1^{(1)}\delta a_1 + A_2^{(1)}\delta a_2 + A_3^{(1)}\delta a_3 + \ldots + A_m^{(1)}\delta a_m = 0, \\ A_1^{(2)}\delta a_1 + A_2^{(2)}\delta a_2 + A_3^{(2)}\delta a_3 + \ldots + A_m^{(2)}\delta a_m = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_1^{(h)}\delta a_1 + A_2^{(h)}\delta a_2 + A_3^{(h)}\delta a_3 + \ldots + A_m^{(h)}\delta a_m = 0, \end{array}\right.$$

où les coefficients $A_i^{(j)}$ sont des fonctions quelconques des longueurs $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ des côtés de la figure que l'on considère.

De telles relations, quand elles existent, seront dites *anormales*.

Il peut se faire aussi qu'une figure contenant k lignes surabondantes soit telle qu'il existe entre les dilatations de ses côtés, outre les k conditions normales (7), un nombre plus ou moins grand k_0 de conditions anormales (8), de sorte que le nombre

total de ces conditions est $k+k_0$, ce qui réduit le nombre des dilatations distinctes qu'elle peut recevoir à

$$m-(k+k_0),$$

tandis que le nombre normal serait $m-k$.

Au lieu qu'aux équations normales (7) il s'en ajoute d'anormales (8), il semble possible, au contraire, que quelques-unes des premières disparaissent. C'est ce qui aurait lieu si les longueurs des m côtés de la figure étaient telles qu'elles annulent identiquement tous les coefficients de l'une des équations (7), telle, par exemple, qu'on eût identiquement

$$\frac{\partial F_1}{\partial a_1}=0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial a_2}=0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F_1}{\partial a_m}=0.$$

Comme les m grandeurs $a_1, a_2, \ldots, a_m$ satisfont déjà aux k équations (6), elles devraient, pour que la circonstance dont il s'agit pût se produire, satisfaire à $m+k$ conditions. On voit donc tout de suite que cela n'aura pas lieu en général; mais nous montrerons que cela ne peut arriver jamais, de sorte que, si le nombre des dilatations distinctes que peut recevoir une figure à m côtés, dont k surabondantes, n'a pas sa valeur normale

$$m-k,$$

il ne peut qu'avoir une valeur moindre.

§ 3.

RELATION ENTRE LE NOMBRE DES DÉFORMATIONS ET DES DILATATIONS. — THÉORÈME. — *A chaque déformation anormale que comporte une figure correspond une relation normale nécessaire entre les dilatations de ses côtés et réciproquement.*

Considérons d'abord une figure strictement déterminée de forme, en sorte que tous les angles de la figure peuvent être exprimés en fonction de ses côtés; soient

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_m$$

les longueurs de ces derniers, et

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \quad \ldots, \quad \omega_h$$

ses angles.

Entre ces diverses grandeurs il existe donc h relations géométriques

(9) $$f(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_h, a_1, a_2, \ldots, a_m) = 0,$$

que nous écrivons, pour abréger, sous la forme

(10) $$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \ldots, \quad f_h = 0,$$

où les premiers membres sont des fonctions f des angles et des côtés de la figure.

Pour chaque figure donnée, les équations (10) peuvent être déterminées par la Géométrie élémentaire.

Formons une nouvelle figure dont les éléments diffèrent infiniment peu de ceux de la figure donnée. Entre leurs variations, on aura les h équations linéaires

(11) $$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{\partial f_1}{\partial \omega_1}\delta\omega_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial \omega_2}\delta\omega_2 + \dfrac{\partial f_1}{\partial \omega_3}\delta\omega_3 + \ldots + \dfrac{\partial f_1}{\partial \omega_h}\delta\omega_h = -\dfrac{\partial f_1}{\partial a_1}\delta a_1 - \ldots - \dfrac{\partial f_1}{\partial a_m}\delta a_m, \\
\dfrac{\partial f_2}{\partial \omega_1}\delta\omega_1 + \dfrac{\partial f_2}{\partial \omega_2}\delta\omega_2 + \dfrac{\partial f_2}{\partial \omega_3}\delta\omega_3 + \ldots + \dfrac{\partial f_2}{\partial \omega_h}\delta\omega_h = -\dfrac{\partial f_2}{\partial a_1}\delta a_1 - \ldots - \dfrac{\partial f_2}{\partial a_m}\delta a_m, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\dfrac{\partial f_h}{\partial \omega_1}\delta\omega_1 + \dfrac{\partial f_h}{\partial \omega_2}\delta\omega_2 + \dfrac{\partial f_h}{\partial \omega_3}\delta\omega_3 + \ldots + \dfrac{\partial f_h}{\partial \omega_h}\delta\omega_h = -\dfrac{\partial f_h}{\partial a_1}\delta a_1 - \ldots - \dfrac{\partial f_h}{\partial a_m}\delta a_m
\end{array}\right.$$

Concevons que des équations (10) on tire les valeurs des angles ω_i en fonction des longueurs des côtés [valeurs, par hypothèse finies et déterminées, puisque les équations (10) se rapportent à une figure existante] et qu'on les porte dans les équations ci-dessus.

Appelons respectivement

$$B_i^{(j)} \quad \text{et} \quad -C_i^{(j)}$$

ce que deviennent

$$\frac{\partial f_i}{\partial \omega_j} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_i}{\partial a_j},$$

par suite de cette substitution. Alors les équations (11) deviennent

$$(12)\left\{\begin{array}{l}
B_1^{(1)}\,\delta\omega_1 + B_2^{(1)}\,\delta\omega_2 + \ldots + B_h^{(1)}\,\delta\omega_h = C_1^{(1)}\,\delta a_1 + C_2^{(1)}\,\delta a_2 + \ldots + C_m^{(1)}\,\delta a_m, \\
B_1^{(2)}\,\delta\omega_1 + B_2^{(2)}\,\delta\omega_2 + \ldots + B_h^{(2)}\,\delta\omega_h = C_1^{(2)}\,\delta a_1 + C_2^{(2)}\,\delta a_2 + \ldots + C_m^{(2)}\,\delta a_m, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B_1^{(h-k)}\,\delta\omega_1 + B_2^{(h-k)}\,\delta\omega_2 + \ldots + B_h^{(h-k)}\,\delta\omega_h = C_1^{(h-k)}\,\delta a_1 + C_2^{(h-k)}\,\delta a_2 + \ldots + C_m^{h-k}\,\delta a_m \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B_1^{(h)}\,\delta\omega_1 + B_2^{(h)}\,\delta\omega_2 + \ldots + B_h^{(h)}\,\delta\omega_h = C_1^{(h)}\,\delta a_1 + C_2^{(h)}\,\delta a_2 + \ldots + C_m^{h}\,\delta a_m,
\end{array}\right.$$

où les coefficients sont des fonctions connues des côtés de la figure donnée.

Pour que cette figure admette des déformations anormales, c'est-à-dire des déplacements changeant les angles sans changer les longueurs des côtés, il faut et il suffit qu'on puisse satisfaire à ces équations par des valeurs nulles des δa_i, c'est-à-dire qu'il faut et il suffit qu'on puisse satisfaire à ces équations privées de leurs seconds membres, soit à

$$(13)\left\{\begin{array}{l}
B_1^{(1)}\,\delta\omega_1 + B_2^{(1)}\,\delta\omega_2 + \ldots + B_h^{(1)}\,\delta\omega_h = 0, \\
B_1^{(2)}\,\delta\omega_1 + B_2^{(2)}\,\delta\omega_2 + \ldots + B_h^{(2)}\,\delta\omega_h = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
B_1^{(h-k)}\,\delta\omega_1 + B_2^{(h-k)}\,\delta\omega_2 + \ldots + B_h^{(h-k)}\,\delta\omega_h = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
B_1^{h}\,\delta\omega_1 + B_2^{h}\,\delta\omega_2 + \ldots + B_h^{h}\,\delta\omega_h = 0.
\end{array}\right.$$

En général, elles n'admettent que la solution

$$\delta\omega_1 = 0, \quad \delta\omega_2 = 0, \quad \ldots, \quad \delta\omega_h = 0,$$

ce qui nous apprend, comme nous le savions déjà, qu'en général une figure comme celle que nous considérons n'admet pas de déformation même infiniment petite. Pour qu'il en soit autrement, il faut et il suffit que leur déterminant Δ soit identiquement nul. Or on peut en général, prenant au hasard les longueurs de $m-1$ des m côtés de la figure, déterminer le $m^{\text{ième}}$ de façon qu'il en soit ainsi. Alors les h équations (13) se réduisent au plus à $h-1$. Supposons qu'elles se réduisent effectivement à $h-1$ distinctes, ce qui a lieu si tous les mineurs de Δ ne sont pas nuls. Alors les rapports des angles $\delta\omega_i$ sont déterminés, de sorte qu'en se donnant l'un de ces angles tous les autres sont déterminés, ce qui équi-

vaut à faire l'hypothèse qu'il existe un seul mode de déformation anormale.

Si nous revenons à présent aux équations complètes (12), en y regardant toujours les angles $\delta\omega_i$ comme les inconnues, de ce que leur déterminant est nul il résulte que ces équations sont incompatibles, à moins que le numérateur de l'une des inconnues soit aussi nul, ce qui fournit une condition linéaire et homogène par rapport aux δa_i, de la forme

$$(14)\qquad A_1\,\delta a_1 + A_2\,\delta a_2 + \ldots + A_m\,\delta a_m = 0.$$

Ainsi, s'il existe un mode de déformation anormale, les équations (12) ne sont compatibles que si les dilatations données aux côtés de la figure satisfont à la condition (14), et, comme les équations (12) doivent être satisfaites par toute figure infiniment voisine de la proposée, il doit en être de même de celle (14) qui en est une conséquence. Cette équation montre donc que la figure proposée, quoique ne renfermant pas de lignes surabondantes, n'est pas librement dilatable; cette équation représente une relation anormale entre les dilatations des côtés de la figure.

Prenons à présent le cas général où les équations (13), au lieu de se réduire à $h-1$, se réduisent à $h-k_0$, c'est-à-dire où la figure proposée comporte k_0 déformations anormales distinctes. Il est facile d'exprimer les relations qui doivent exister, pour cela, entre les coefficients $B_i^{(j)}$, c'est-à-dire entre les longueurs des côtés de la figure donnée, et de choisir ces longueurs en conséquence quand les conditions obtenues sont compatibles. Le moyen le plus simple de les écrire résulte de la théorie si nette et si précise des équations du premier degré donnée par M. Rouché au *Journal de l'École Polytechnique,* et il ressort de cette théorie que si les équations (13) sont réductibles à $h-k_0$, celles (12) se décomposent en deux groupes, à savoir :

L'un de k_0 équations ne renfermant plus aucune des inconnues $\delta\omega_i$, exprimant, par conséquent, les conditions de compatibilité du système entier; le second de $h-k_0$ équations permettant toujours, si les k_0 premières sont satisfaites, d'exprimer $h-k_0$ des h inconnues en fonction des k_0 autres et des seconds membres des équations, sous forme finie et déterminée.

Ici les k_0 équations de condition sont des équations linéaires et

homogènes entre les dilatations des côtés, c'est-à-dire qu'elles représentent des conditions anormales auxquelles sont assujetties ces dilatations, quoiqu'il n'existe aucune condition de ce genre entre les côtés de la figure proposée.

Je dis que, réciproquement, si entre les dilatations des côtés d'une figure il existe k_0 conditions anormales, elle pourra recevoir k_0 déformations anormales.

En effet, les équations (12) représentent les relations les plus générales possibles auxquelles doivent satisfaire les variations des éléments (angles et côtés) de la figure.

Donc les k_0 conditions anormales qu'on suppose exister entre les dilatations des côtés seuls sont des conséquences des équations (12).

Celles-ci peuvent donc se décomposer en deux groupes : l'un formé par ces k_0 équations qui ne renferment aucun angle, qui sont linéaires et homogènes par rapport aux δa_i; l'autre formé par $h - k_0$ relations entre les $\delta\omega_i$ et les δa_i. Donc les équations (13), qui se déduisent des précédentes en annulant les δa_i, se réduisent en tout à $h - k_0$ équations linéaires et homogènes entre les h angles $\delta\omega_i$. Par suite, on pourra y satisfaire d'une k_0^{tuple} infinité de manières, c'est-à-dire qu'il existe k_0 modes de déformations anormales de la figure.

Si la figure contenait k lignes surabondantes, on pourrait exprimer les h angles ω_i de la figure en fonction de $m - k$ de ses côtés par h équations de la forme (10) et répéter sur ces équations tous les raisonnements qui précèdent.

Supposons, au contraire, que la figure renferme k lignes de moins que le nombre nécessaire pour la définir de forme. Alors, tous les angles de la figure supposés toujours au nombre de h ne sont plus déterminés quand les longueurs des côtés sont données; sur ces h angles, il y en a k qui restent arbitraires, de sorte que, au lieu d'avoir h équations (10) entre les h angles ω_i et les m côtés a_i de la figure, on n'en a plus que $h - k$. Il faut donc supposer les équations (12) et (13) réduites aux $h - k$ premières.

Celles (13) pourront toujours être satisfaites de k manières, ce qui fournit les k modes de *déformations normales* (§ 2) de la figure.

Pour qu'il existe, en outre, k_0 déformations anormales, il faut

et il suffit que ces $h - k$ équations se réduisent à $h - k - k_0$. Si cela a lieu, il résulte de la théorie des équations du premier degré et, plus nettement, de celle déjà mentionnée düe à M. Rouché que les $h - k$ équations (12) se décomposent en deux groupes, dont l'un formé de k_0 équations ne renfermant plus aucun des angles $\delta\omega_i$ et qui, par suite, représentent les conditions anormales auxquelles sont assujetties les dilatations des côtés de la figure donnée (quoique ici la figure non seulement ne renferme pas de lignes surabondantes, mais ne soit même pas de forme déterminée), et, réciproquement, si k_0 pareilles conditions existent, cela veut dire que le groupe (12) peut être remplacé par les équations qui les représentent et par $h - k - k_0$ autres renfermant seules les angles $\delta\omega_i$, d'où résulte que les équations (12) se réduisent à ces dernières privées de leurs seconds membres et comportent, par suite, $k + k_0$ solutions distinctes, soit k_0 solutions répondant à des déformations anormales en sus de celles répondant aux k déformations normales.

Théorème II. — *Le nombre des déformations tant normales qu'anormales d'une figure à n sommets, plus le nombre de ses dilatations distinctes (eu égard aux conditions tant normales qu'anormales existant entre leurs grandeurs) est toujours, sans exception, égal à* $2n - 3$.

La proposition est évidente dans le cas général où il n'y a ni déformations anormales, ni conditions anormales entre les dilatations.

Supposons, en effet, que la figure contienne k lignes surabondantes, en sorte que le nombre de ses côtés est

$$m = 2n - 3 + k.$$

La figure ne peut recevoir aucune déformation normale et elle peut recevoir $m - k$ dilatations normales, soit comme total des déformations et dilatations

$$m - k = 2n - 3.$$

Cela est vrai, en particulier, si $k = 0$, c'est-à-dire si la figure est strictement définie de forme.

Supposons à présent

$$m = 2n - 3 - k.$$

Alors la figure peut recevoir k déformations normales et m dilatations normales, soit un total de déformations et dilatations représenté par

$$m + k = 2n - 3.$$

Or la proposition subsiste s'il y a des déformations anormales ou des relations anormales entre les dilatations des côtés.

En effet, en vertu du théorème I, à chaque déformation anormale répond une condition nécessaire imposée aux dilatations des côtés de la figure et *vice versa,* c'est-à-dire qu'à chaque déformation anormale ou existant en plus de celles que comporterait normalement le nombre des côtés d'une figure répond une dilatation de moins que le nombre de celles normalement possibles, et *vice versa*. Donc le total du nombre des déformations et du nombre des dilatations distinctes d'une figure n'est pas modifié par les circonstances anormales qu'elle peut présenter.

On peut aussi établir la proposition directement et très simplement. Supposons, pour un instant, que le nombre total des déformations distinctes tant normales qu'anormales, plus le nombre des dilatations distinctes (eu égard aux relations anormales qui peuvent exister entre elles) d'une figure à n sommets puisse être différent de $2n - 3$ et représentons-le par

$$2n - 3 + s,$$

s étant un nombre positif ou négatif.

Les déplacements distincts, qu'il est possible de donner à la figure se composent :

1° De ceux qui altèrent les angles de la figure sans altérer ses côtés, c'est-à-dire de ses déformations normales et anormales;

2° De ceux qui modifient à la fois les angles et les côtés, c'est-à-dire des dilatations;

3° De ceux, au contraire, qui n'altèrent ni les uns, ni les autres, c'est-à-dire qui laissent la figure invariable.

Ces derniers sont au nombre de trois; les premiers et les se-

conds étant, par hypothèse, au nombre de $2n - 3 + s$, le total est

$$2n + s.$$

Mais un point dans un plan ne peut recevoir que deux déplacements distincts; les n points d'articulation peuvent donc recevoir en tout

$$2n$$

déplacements distincts, ni plus, ni moins; il faut donc que $s = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. — *Le nombre des dilatations distinctes d'une figure à m côtés, dont k surabondants, ne peut être supérieur à $m - k$.*

En effet, si n est le nombre des sommets d'une telle figure, on a

$$m = 2n - 3 + k,$$

d'où

$$m - k = 2n - 3.$$

Et, comme le nombre des dilatations distinctes, plus celui des déformations d'une figure quelconque, est égal à $2n - 3$, celui des dilatations est au plus égal à $2n - 3$ ou, dans le cas actuel, à $m - k$.

Théorème III. — *Les conditions normales existant entre les dilatations des côtés d'une figure à k lignes surabondantes sont toujours au nombre de k.*

Entre les côtés d'une telle figure, il existe (§ 2) k équations qui, différentiées par la caractéristique δ, fournissent entre les dilatations des côtés les k équations (7) que nous avons appelées *les conditions normales auxquelles sont assujetties les dilatations*. Il s'agit de montrer que ces k équations sont toujours distinctes, qu'elles ne peuvent, en aucun cas, se réduire à un nombre moindre.

En effet, supposons qu'elles se réduisent à

$$k - k_0,$$

Il faudra alors que les k_0 conditions normales manquantes soient remplacées par des conditions anormales, autrement, la figure supposée à m côtés admettrait

$$m-(k-k_0)=m-k+k_0$$

dilatations distinctes, ce qui est impossible en vertu du dernier corollaire.

Mais, d'autre part, s'il existait k_0 relations anormales entre les dilatations de la figure considérée, elle admettrait (th. I) k_0 déformations anormales.

On pourrait donc lui imprimer :

1° Ces k_0 derniers mouvements ;

2° $m-k$ dilatations (puisque entre celles-ci il n'existe que k conditions, dont $k-k_0$ normales et k anormales).

Cela ferait donc comme total des déformations et dilatations

$$m-k+k_0,$$

soit à cause de

$$m=2n-3+k, \qquad 2n-3+k_0,$$

ce qui est impossible en vertu du théorème II.

B. — CONDITIONS NORMALES ET ANORMALES D'ÉQUILIBRE DES SYSTÈMES ARTICULÉS.

§ 4.

Théorème. — *Pour qu'un système articulé formé de corps solides soit en équilibre, il faut et il suffit :* 1° *que les forces qui le sollicitent satisfassent aux conditions d'équilibre des systèmes invariables ;* 2° *que la somme de leurs travaux virtuels soit nulle pour toutes les déformations infiniment petites,* tant normales qu'anormales *du système.*

En effet, il faut évidemment et il suffit, pour l'équilibre du système, que la somme des travaux virtuels des forces qui le sollicitent soit nulle pour tous les déplacements compatibles avec les liaisons, c'est-à-dire pour tous les déplacements laissant inaltérées

les longueurs des côtés de la figure géométrique formée par les axes des barres. Or ces déplacements sont :

1° Ceux de simple translation ou de simple rotation dans lesquels le système tout entier se déplace comme s'il était invariable. On obtient ainsi les conditions d'équilibre des systèmes invariables ou conditions communes à tous les systèmes matériels libres ;

2° Les déformations virtuelles normales du système ;

3° Les déformations anormales quand il en comporte.

Les conditions résultant de ces derniers mouvements, nous les appellerons les conditions *anormales* d'équilibre, réservant la qualification de *normales* aux conditions fournies par les mouvements 1° et 2°.

Corollaire. — Pour qu'un système articulé de forme invariable (c'est-à-dire comprenant au moins $2n - 3$ côtés, s'il est à n sommets), soit en équilibre, il faut et il suffit, *s'il ne comporte aucune déformation anormale,* que les forces qui le sollicitent satisfassent aux conditions d'équilibre des systèmes invariables ; mais, s'il comporte un certain nombre de déformations anormales, ces forces devront satisfaire en outre à un pareil nombre de conditions anormales.

Ce résultat peut sembler contradictoire avec les premiers fondements de la Statique. Un système articulé de forme invariable et dont nous supposons les barres parfaitement rigides constituant, en effet, un système invariable dans l'acception ordinaire du mot, il semblerait que toujours il doit être en équilibre, si les forces qui le sollicitent satisfont aux conditions d'équilibre des systèmes invariables ; mais nous verrons que cela n'est vrai que si l'on attribue aux barres du système la faculté de résister à des tensions infinies.

§ 5.

CONDITIONS POUR QUE LA STATIQUE PUISSE DÉTERMINER LES TENSIONS D'UN SYSTÈME DE BARRES. — Théorème I. — *Pour que la Statique puisse déterminer les tensions d'un système de barres libre, il faut et il suffit, sans exception :*

1° *Que, s'il est à n sommets ou points d'articulation, il contienne au plus* $2n - 3$ *barres;*

2° *Qu'il ne comporte aucune équation anormale d'équilibre ou (ce qui revient au même) aucune déformation normale.*

En effet, nous avons vu (Note ci-dessus, th. I) que, pour que la Statique fournisse les tensions d'un système de barres, il faut et il suffit, sans exception, qu'il soit librement dilatable. Or il n'est jamais librement dilatable si, ayant n sommets, il comporte plus de $2n - 3$ côtés, parce qu'alors il existe entre ses dilatations des relations normales qui ne peuvent jamais (§ 4) être identiques.

Il est donc nécessaire qu'il renferme au plus $2n - 3$ côtés.

Il est nécessaire aussi, pour qu'il soit librement dilatable, qu'il ne comporte aucune équation anormale d'équilibre; car chaque équation anormale d'équilibre répond à une déformation virtuelle anormale et à chaque pareille déformation répond (§ 3) une relation anormale entre les dilatations.

Les conditions indiquées sont donc toutes nécessaires. D'ailleurs, si elles sont remplies, le système est librement dilatable; il ne comporte ni relations normales entre les dilatations de ses côtés, puisqu'il n'a pas de lignes surabondantes, ni relations anormales, puisqu'il n'a pas de déformation anormale (th. I).

Théorème II. — *Si un système n'est pas librement dilatable et si, entre les dilatations de ses côtés, il existe :*

1° k *relations normales,* k *étant nul, s'il n'y a pas de lignes surabondantes;*

2° k_0 *relations anormales,*

La Statique fournit $k + k_0$ *équations de moins que le nombre nécessaire pour déterminer les tensions de toutes les barres.*

En effet, les seules relations où entrent les tensions des barres que peut fournir l'application du principe des vitesses virtuelles sont celles qui proviennent de dilatations virtuelles données aux barres. Si donc, entre les dilatations des m barres d'une figure, il existe $k \div k_0$ relations, de façon que la figure ne puisse recevoir que $m - k \perp k_0$ dilatations distinctes, la Statique ne pourra fournir que $m - k - k_0$ équations entre les tensions.

§ 6.

FIGURES NON LIBRES. — Les mêmes principes s'appliquent aux figures non libres, en se bornant alors aux déplacements virtuels compatibles avec les sujétions des points d'articulation.

THÉORÈME III. — 1° *Si le nombre des sujétions est inférieur ou égal à* 3, *on détermine directement les réactions des appuis et l'on rentre dans le cas des figures libres.*

2° *Si le nombre des sujétions d'une figure à n sommets et m côtés est égal à* $i+3$, *pour que la Statique puisse fournir les tensions des côtés et les réactions des appuis, il faut et il suffit :*

a. Que $m \leqq 2n-3-i$;

b. Que la figure ne comporte aucune équation anormale d'équilibre ou aucune déformation anormale compatible avec les sujétions des points d'articulation;

c. Si la figure comporte $2n-3-i+k$ *côtés et* k_0 *conditions anormales d'équilibre, la Statique fournit* $k+k_0$ *équations de moins que le nombre nécessaire pour définir les tensions et les réactions des appuis.*

§ 7.

MÉTHODE GÉNÉRALE POUR RECONNAITRE S'IL EXISTE DES CONDITIONS ANORMALES D'ÉQUILIBRE. — Soient m le nombre des barres et n le nombre des points d'articulation d'un système de barres libre.

Pour qu'il soit en équilibre, il faut d'abord que les forces qui le sollicitent satisfassent aux trois conditions d'équilibre des systèmes invariables. Supposons que cela ait lieu. Écrivons que chaque point d'articulation est en équilibre sous l'influence des forces données qui lui sont directement appliquées et des tensions inconnues des barres qui en sont issues. On aura ainsi $2n$ équations linéaires se réduisant à $2n-3$ en vertu des conditions d'équilibre.

Ceci posé, il y a trois cas à considérer :

1° $m = 2n - 3$. — On a autant d'équations que d'inconnues. Si le déterminant de ces équations est différent de zéro, elles fourniront pour les tensions, des valeurs finies et déterminées. Il n'y aura aucune condition anormale d'équilibre.

Si, au contraire, le déterminant est nul, il est certain que les équations proposées seront décomposables en deux groupes : l'un d'un certain nombre k_0 d'équations ne renfermant pas les inconnues; l'autre de $2n - 3 - k_0$ équations les comprenant. La méthode de M. Rouché invoquée plus haut permet, dans tous les cas, de former ces deux groupes d'équations. Celles du premier donnent les conditions anormales d'équilibre. Si elles ne sont pas satisfaites d'elles-mêmes, les équations considérées sont incompatibles; elles fournissent pour les tensions des valeurs infinies. L'équilibre ne peut pas avoir lieu. Si, au contraire, elles le sont, celles du second groupe permettront toujours d'exprimer $2n - 3 - k_0$ tensions inconnues sous forme finie et déterminée en fonction de k_0 autres qui restent indéterminées. L'équilibre a lieu, mais la Statique fournit k_0 équations de trop peu pour déterminer les tensions.

2° $m < 2n - 3$. — Soit $m = 2n - 3 - k$. En ce cas, le système se décompose normalement en deux groupes : l'un de k équations ne contenant pas les tensions inconnues et qui sont les k conditions normales d'équilibre auxquelles les forces données doivent satisfaire en outre des trois conditions communes à tous les systèmes libres.

Les $2n - 3 - k = m$ équations restantes fournissent les tensions inconnues. Mais il peut arriver que le premier groupe comprenne un nombre $k + k_0 > k$ d'équations et le second seulement un nombre $2n - 3 - k - k_0 = m - k_0$. La méthode de M. Rouché fournira, dans tous les cas, les équations des deux groupes. Celles du premier devront toujours être satisfaites d'elles-mêmes et comprendront les k conditions normales et les k_0 conditions anormales d'équilibre.

Si elles ne le sont pas, les tensions sont infinies, c'est-à-dire que l'équilibre ne peut pas avoir lieu, même si les k conditions normales étaient satisfaites.

Si elles le sont, les $m - k_0$ équations restantes fournissent toujours sous forme finie et déterminée $m - k_0$ des m tensions inconnues en fonction des k_0 autres qui restent indéterminées.

3° $m > 2n - 3$. — Soit $m = 2n - 3 + k$. En ce cas, il n'y a pas d'autre condition normale d'équilibre que les conditions relatives aux systèmes invariables. Les $2n - 3 = m - k$ équations exprimant l'équilibre de chaque point d'articulation permettent, en général, d'exprimer sous forme finie et déterminée autant de tensions en fonction des k autres qui restent nécessairement indéterminées.

Cela a lieu si ce que M. Rouché appelle le déterminant caractéristique est d'ordre $m - k$. Dans le cas contraire, le système est décomposable en deux groupes, l'un de k_0 équations ne renfermant pas les inconnues et qui sont les conditions anormales d'équilibre devant être satisfaites d'elles-mêmes, faute de quoi les tensions sont infinies.

Si ces conditions sont satisfaites, on pourra exprimer $m-k-k_0$ tensions sous forme finie et déterminée en fonction des $k + k_0$ autres restant arbitraires.

§ 8.

RELATIONS FOURNIES PAR LA STATIQUE ENTRE LES TENSIONS CALORIFIQUES. — Il peut arriver que les barres d'un système articulé supportent des tensions alors même qu'aucune force extérieure n'agit sur lui, par exemple, parce que ces barres sont inégalement échauffées.

Appelons, pour abréger, *tensions calorifiques* les tensions, quelle qu'en soit la cause, pouvant ainsi exister en dehors de l'action des forces extérieures.

Entre ces tensions doivent toujours exister les relations fournies par la Statique, c'est-à-dire que chaque sommet doit, dans ce cas, être en équilibre sous l'influence des seules tensions des barres qui en sont issues.

Les relations ainsi obtenues sont linéaires et homogènes par rapport aux tensions. Ce sont les mêmes que celles qu'on obtient lorsqu'il s'agit de forces extérieures, mais privées des termes relatifs à ces forces.

Toutes les fois que la Statique fournit les tensions d'un système de barres, cela veut dire que les relations entre les tensions sont en nombre égal à celles-ci et ont un déterminant différent de zéro.

Dans le cas actuel, on a, entre les m tensions inconnues t_i, m équations linéaires et homogènes dont le déterminant est différent de zéro.

Elles n'admettent donc comme solution que des valeurs nulles $t_i = 0$ pour toutes les inconnues.

Si, au contraire, la Statique fournit $k + k_0$ équations de trop peu, alors entre les m tensions on a $m - k - k_0$ équations homogènes admettant une $(k + k_0)^{\text{uple}}$ infinité de solutions. Si $k = 0$, $k_0 = 1$ ou $k_0 = 0$, $k = 1$, on a $m - 1$ équations homogènes entre les m tensions inconnues. Si les déterminants mineurs ne sont pas tous nuls, les rapports des tensions à l'une d'entre elles sont déterminées. Une seule tension est arbitraire. Si on se la donne, toutes les autres s'ensuivent.

En résumé :

Théorème. — *Les systèmes dont les tensions sont déterminables par la Statique ne peuvent pas subir de tensions calorifiques; tous les autres peuvent en subir.*

La discussion du paragraphe précédent s'applique d'ailleurs de tous points aux tensions calorifiques; car la décomposition des équations en deux groupes se reconnaît par l'étude des déterminants qui sont indépendants des seconds membres des équations, c'est-à-dire des forces agissantes, de sorte que tous les résultats obtenus subsistent pour des équations homogènes ou des tensions dues à des causes autres que des forces.

§ 9.

Résumé des caractères des systèmes dont la Statique ne fournit pas les tensions. — On peut affirmer que la Statique ne peut pas fournir les tensions d'un système articulé :

1° S'il présente des lignes surabondantes, ce qu'on reconnaît en comptant le nombre n de ses sommets et le nombre m de ses barres et vérifiant : (a) s'il est libre ou assujetti à moins de trois

conditions, si $m > 2n - 3$; (b) s'il est soumis à $i + 3$ conditions, si $m > 2n - 3 - i$. C'est le cas général;

2° Si le système admet des équations anormales d'équilibre, ce qu'on reconnaît par la méthode du § 7;

3° Si le système est susceptible d'être tendu sans que des forces extérieures agissent sur lui, ce qu'on reconnaît aussi (§ 8) par la méthode du § 7;

4° Si le système admet des déformations anormales, ce qu'on reconnaît par la méthode du § 3.

§ 10.

EXEMPLES DE SYSTÈMES PRÉSENTANT DES CONDITIONS ANORMALES D'ÉQUILIBRE. — Nous avons déjà indiqué dans la note des pages 152 et 153 du tome I (*fig.* 21) un système à $n = 6$ sommets et $2n-3=9$ côtés, susceptible d'une déformation anormale. Il en résulte, en vertu de la théorie qui vient d'être exposée, que les forces appliquées en ses six sommets A, B, C; a, b, c doivent aussi présenter une condition anormale d'équilibre, outre les conditions d'équilibre des systèmes invariables. Cette condition est facile à trouver. Si l'on coupe les trois barres Aa, Bb, Cc, la partie de la figure placée d'un côté de la section doit être en équilibre sous l'influence des forces qui la sollicitent et des tensions des barres composées. Mais, comme ces tensions sont concourantes en S, il faut que la résultante des trois forces données agissant en a, b, c passe en ce point.

Il doit en être de même de la résultante de celles agissant en A, B, C. Mais cette seconde condition est évidemment remplie d'elle-même si la première l'est en vertu des conditions normales d'équilibre de l'ensemble des forces.

On peut affirmer aussi que le système dont il s'agit serait tendu si ses barres étaient portées à des températures différentes, quoiqu'il ne renferme pas de lignes surabondantes. Cette remarque avait déjà été faite par Crofton dans les *Proceedings of royal Society* de 1872.

Crofton a, dans le même article, fait observer qu'une autre figure aussi à $n = 6$ sommets et $2n - 3 = 9$ côtés formés par un hexagone inscriptible dans une conique et ses trois diagonales est

susceptible d'être tendue sans que des forces agissent en ses sommets; d'où nous pouvons conclure qu'une telle figure admet aussi une déformation anormale, une condition anormale d'équilibre et qu'enfin la Statique fournit une équation de moins que le nombre voulu pour la détermination des tensions qu'elle prend sous l'influence des forces données.

On peut généraliser la proposition sous la forme suivante : *Un système articulé formé par un polygone d'un nombre pair* $2n$ *de côtés et des* n *diagonales qui joignent les sommets opposés n'est pas librement dilatable et peut, par suite, être tendu sans que des forces extérieures agissent sur lui, pourvu que les* n *points de concours des côtés opposés soient en ligne droite.*

Cela est d'autant plus remarquable que, le nombre m des côtés étant

$$m = 3n = 2 \times 2n - 3 - (n - 3),$$

la figure n'est même pas définie de forme pour $n > 3$, c'est-à-dire lorsque le polygone renferme plus de six côtés. Il peut jouer dans ses articulations et, malgré cela, il n'est pas librement dilatable.

Pour le démontrer, prenons, pour fixer les idées (*fig.* A, *Pl. XLIV*), un octogone ABCDEFGH composé des côtés

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,

dont les côtés opposés concourent aux points (1.5), (2.6), (3.7), (4.8) supposés en ligne droite et les diagonales AE, BF, CG, DH joignant les sommets opposés que nous appelons

9, 10, 11, 12.

Aux deux extrémités A et B du côté AB ou 1, appliquons deux forces égales et opposées t_1 et t'_1; de même, aux deux extrémités B et C, deux forces t_2, t'_2, et ainsi de suite pour les douze côtés du système. Pour que ces forces puissent représenter des tensions, il faut que chaque sommet A, B, C, D, E, F, G, H soit séparément en équilibre sous l'influence des trois forces qui y sont appliquées. Il s'agit de savoir si et comment on peut déterminer les forces t_1, t_2, t_3, t_4, ..., t_{12} de façon qu'il en soit ainsi.

Coupons les quatre barres diagonales près de leurs extrémités et appliquons en ces points leurs tensions t_9, t'_9; t_{10}, t'_{10}; t_{11}, t'_{11}; t_{12}, t'_{12}.

Le polygone ABCDEFGH est alors un simple polygone articulé fermé, en équilibre sous l'action de ces huit forces. Soit (*fig. a*, *Pl. XLIV*) 9, 10, 11, 12; 9′, 10′, 11′, 12′ le polygone de ces forces.

Ce polygone se ferme de lui-même.

Soient *a* l'origine du côté 9 et *b* l'extrémité du côté 12.

Pour l'équilibre, il faut et il suffit (§ 78) que le polygone ABCDEFGHA coïncide avec l'un des polygones funiculaires des forces considérées. Soit O le pôle de ce polygone, en sorte que les rayons 1, 2, 3, ..., issus de O, représentent les tensions des côtés du polygone.

Le polygone des forces a évidemment un centre C situé au milieu de *ab*. Soit O′ le symétrique du pôle O relativement à ce centre; il est clair que les rayons issus de O′ et allant aux extrémités et aux sommets du demi-polygone des forces formé par les côtés 9, 10, 11, 12 sont respectivement égaux et parallèles à ceux issus de O et allant aux sommets opposés.

De là, on conclut que le demi-polygone AHGFE peut aussi être regardé comme polygone funiculaire de pôle O′ des forces 9, 10, 11, 12. Ainsi, les deux moitiés ABCDE et EFGHA du polygone donné sont deux polygones funiculaires de pôles O et O′ d'un même système de forces 9, 10, 11, 12 appliquées suivant les lignes d'action AE, BF, CG, DH.

Donc leurs côtés correspondants AB et EF, BC et FG, etc., qui ne sont autres que les côtés opposés du polygone donné, ont leurs points de concours sur une droite parallèle à la ligne des pôles OO′ (§ 43).

Ainsi, cette condition est nécessaire pour que le système puisse être en équilibre sous l'influence des tensions agissant suivant ses côtés.

Je dis qu'elle est suffisante.

En effet, supposons-la remplie. Par un pôle O menons les rayons 8, 1, 2, 3, 4 parallèles aux côtés donnés **8**, **1**, **2**, **3**, **4** et, d'un point quelconque *a* pris sur 8, menons les lignes 9, 10, 11, 12 parallèles aux diagonales 9, 10, 11, 12. Soit *b* l'extrémité du contour obtenu.

Si, par un point O′ symétrique du milieu de *ab*, on mène les vecteurs aux sommets du polygone formé par les côtés 9, 10, 11,

12, par cela même que les côtés opposés du polygone donné ont leurs points de concours en ligne droite, le demi-polygone EFGHA sera un polygone funiculaire relatif au pôle O′ des forces dont le demi-polygone ABCDE est polygone funiculaire relatif au pôle O et, par suite, si l'on construit les côtés 9′, 10′, 11′, 12′ égaux et parallèles à 9, 10, 11, 12, il est polygone funiculaire relatif au pôle O de ces nouvelles forces. Ainsi, le polygone fermé ABCDEFGHA est polygone funiculaire relatif au pôle O des forces représentées par

9, 10, 11, 12; 9′, 10′, 11′, 12′.

appliquées en ses sommets

A, B, C, D, E, F, G, H.

Donc, si, suivant les côtés du polygone, on applique des tensions représentées par les rayons polaires 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et, suivant les diagonales, des tensions représentées par les côtés, chaque sommet sera séparément en équilibre.

Ces forces constituent donc un système de tensions statiquement possible, quoique aucune force extérieure n'agisse sur le système.

Une seule de ces forces est arbitraire et varie avec le point a arbitrairement choisi sur la ligne 8. Toutes les autres sont alors déterminées, de sorte que la Statique définit ici les rapports des tensions à l'une d'entre elles, ce qui montre que, si ces forces agissent sur le système, elles devront satisfaire à $n - 3$ conditions normales d'équilibre, $2n$ étant le nombre des côtés du polygone, en sus des trois relatives aux systèmes invariables, plus une seule condition anormale d'équilibre, et aussi qu'entre les dilatations des côtés du système il existe une relation et une seule.

Autres exemples. — 1° Supposons que deux sommets H et G se rapprochent indéfiniment, les résultats précédents resteront applicables. On aura ainsi des systèmes formés par un polygone d'un nombre impair $2n - 1$ de côtés;

b. n diagonales dont deux issues d'un même sommet et allant aux deux extrémités du côté opposé à ce sommet et les autres joignant les sommets opposés des deux portions de polygones subsis-

tant si l'on fait abstraction du sommet et du côté qu'on vient de considérer.

Pourvu que les $n - 1$ points d'intersection des côtés opposés obtenus en considérant ces deux portions de polygones soient en ligne droite, le système n'est pas librement dilatable.

2° Considérons de nouveau un polygone d'un nombre pair de côtés ABCDEFGHA (*fig.* A. *Pl. XLIV*). Menons une diagonale AE joignant deux sommets opposés, puis les diagonales BH, CG, DF obtenues en joignant les deux premiers sommets des deux demi-polygones ABE, AHE qu'on rencontre en les parcourant de A vers E, puis les deux seconds sommets rencontrés et ainsi de suite.

Pourvu que les deux côtés BC et HG, pris avec CD et GF, etc., se coupent sur la droite AE, le système n'est pas librement dilatable. (Même démonstration que ci-dessus).

3° On déduit de là une proposition pareille pour le cas où le polygone a un nombre impair de côtés, en supposant que l'un des côtés décroisse indéfiniment.

§ 11.

RECHERCHES DES TENSIONS LORSQU'IL EXISTE DES CONDITIONS ANORMALES D'ÉQUILIBRE. — Par les méthodes qui précèdent, on sait quand un système comporte des conditions anormales d'équilibre et l'on sait les trouver.

Considérons, en général, un système à k lignes surabondantes (k étant nul pour les systèmes renfermant strictement ou ne renfermant pas le nombre de lignes nécessaires pour les définir).

Admettons qu'on sache que le système comporte k_0 conditions d'équilibre anormales.

Puisqu'il renferme k lignes surabondantes, il existe entre les dilatations de ses côtés k équations normales de la forme

$$\frac{\partial F}{\partial a_1}\delta a_1 + \frac{\partial F}{\partial a_2}\delta a_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_m}\delta a_m = 0, \tag{14}$$

et que nous savons trouver, et puisqu'il comporte k_0 équations anormales d'équilibre, il existe aussi entre ses dilatations k_0 rela-

tions anormales de la forme

$$(15) \qquad A_1\,\delta a_1 + A_2\,\delta a_2 + \ldots + A_m\,\delta a_m = 0,$$

qu'on sait aussi trouver (§ 3).

Par suite, entre les allongements élastiques α_i des côtés, on a les mêmes équations au nombre de $k+k_0$

$$(16) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a_1}\alpha_1 + \dfrac{\partial F}{\partial a_2}\alpha_2 + \ldots + \dfrac{\partial F}{\partial a_m}\alpha_m = 0, \\ A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \ldots + A_m\alpha_m = 0. \end{cases}$$

Prenons le cas plus général où ces allongements proviennent en partie de forces, en partie de la chaleur.

Soient δ_i le coefficient de dilatation par la chaleur de la barre a_i et τ_i sa température, de sorte que son allongement calorifique est $\delta_i a_i \tau_i$. Réservons la lettre α_i pour la partie de cet allongement provenant des forces élastiques, de sorte que l'allongement total est

$$\alpha_i + \delta_i\tau_i a_i,$$

et les équations précédentes deviennent

$$\frac{\partial F}{\partial a_1}(\alpha_1 + \delta_1\tau_1 a_1) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_m}(\alpha_m + \delta_m\tau_m a_m) = 0,$$
$$A_1(\alpha_1 + \delta_1\tau_1 a_1) + \ldots + A_m(\alpha_m + \delta_m\tau_m a_m) = 0.$$

D'ailleurs, si t_i est la tension d'une barre, on a

$$\alpha_i = \frac{a_i}{E_i}\frac{t_i}{S_i}.$$

Donc

$$\frac{\partial F}{\partial a_1}a_1\left(\frac{t_1}{E_1 S_1} + \delta_1\tau_1\right) + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_m}\left(\frac{t_m}{E_m S_m} + \delta_m\tau_m\right)a_m = 0,$$
$$A_1 a_1\left(\frac{t_2}{E_1 S_1} + \delta_1\tau_1\right) + \cdots + A_m\left(\frac{t_m}{E_m S_m} + \delta_m\tau_m\right)a_m = 0.$$

Telles sont les $k+k_0$ équations qui, jointes à celles, au nombre de $m-k-k_0$, données par la Statique, fourniront toujours des valeurs finies et déterminées pour les tensions des barres.

S'il n'y a pas de forces et que les tensions soient purement calorifiques, les $m-k-k_0$ équations de la Statique sont homogènes

par rapport aux inconnues; les $k + k_0$ dernières équations ne subissent aucun changement.

Les tensions cherchées seront des fonctions linéaires et homogènes des températures τ_i et sont, par suite, nulles si toutes les températures τ_i sont elles-mêmes nulles, c'est-à-dire si toutes les barres sont à la température de pose de la charpente, laquelle, dans toutes nos équations, est prise pour zéro de l'échelle thermométrique (1).

(1) Les systèmes qui font l'objet de cette Note sont, comme il est aisé de le comprendre, intimement liés à ceux qui servent à décrire mécaniquement des arcs de cercle, comme les systèmes Peaucellier, Hart, etc.

NOTE II.

SUR LE PROBLÈME DU CONVOI PASSANT SUR UNE POUTRE A DEUX APPUIS.

J'ai montré dans la Ire Partie de cet Ouvrage (§ 220, 221) comment, en partant du théorème de M. le capitaine Ventre (§ 219), on peut construire le moment de flexion maximum produit par un convoi dans une section donnée d'une poutre à deux appuis simples, supportant en même temps une charge permanente de q^{kg} par mètre. Il suffit de construire la parabole ASB (*fig.* A, *Pl. XXIII*) représentant le moment de flexion dû à la demi-charge permanente plus le poids total du convoi supposé uniformément réparti sur la poutre. *Le moment cherché dans chaque section est proportionnel à la portion d'ordonnée comprise entre cette courbe et un certain polygone.*

Relativement à la construction de ce polygone, M. Eddy m'a communiqué un théorème nouveau qui complète d'une façon très élégante la méthode déduite du théorème de M. Ventre.

L'un quelconque de ses côtés a pour ordonnée m_i

$$(a) \qquad m_i = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\mu_{ig} + \frac{x}{l}\mu_{id},$$

μ_{ig} et μ_{id} étant respectivement les sommes, en valeur absolue, des moments relativement à l'essieu n° i des forces qui agissent à sa gauche et à sa droite.

D'abord les verticales des sommets de ce polygone sont connues d'avance. En vertu du théorème même que nous venons de rappeler, les sections passant par le sommet sont telles que le moment de flexion maximum s'y produit indifféremment sous l'action de l'un ou de l'autre des deux essieux répondant aux deux côtés du polygone contigus à ce sommet. Or les sections qui possèdent cette propriété sont (§ 215) celles qui ont pour ab-

scisses

$$\alpha'_1 = \frac{P_1}{\sum_1^n P} l,$$

$$\alpha'_2 = \frac{P_1 + P_2}{\sum_1^n P} l,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\alpha'_s = \frac{P_1 + P_2 + \ldots + P_s}{\sum_1^n P} l = \frac{\sum_1^s P}{\sum_1^n P} l,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\alpha'_{n-1} = \frac{\sum_1^{n-1} P}{\sum_1^n P} l,$$

l étant la longueur de la poutre; $P_1, P_2, \ldots, P_n$ les charges des n essieux composant le convoi en sorte que $\sum_1^n P$ est le poids total de celui-ci.

Ces verticales se trouvent donc par la construction très simple du § 215. Supposons-les tracées. Cela étant, soient

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{n-1}$$

les distances des essieux, a_1 étant la distance entre les essieux des charges P_1 et P_2; a_2 celle entre les essieux des charges P_2 et P_3 et ainsi de suite.

On aura

$$\mu_{ig} = P_1(a_1 + a_2 + \ldots + a_{i-1}) + P_2(a_2 + a_3 + \ldots + a_{i-1}) + \ldots + P_{i-1} a_{i-1},$$

ou

$$\mu_{ig} = P_1 a_1 + (P_1 + P_2) a_2 + \ldots + (P_1 + P_2 + \ldots + P_{i-1}) a_{i-1},$$

soit

$$\mu_{ig} = \frac{\sum_1^n P}{l} [a_1 \alpha'_1 + a_2 \alpha'_2 + \ldots + a_{i-1} \alpha'_{i-1}];$$

ou, si l'on applique suivant les verticales des sommets du polygone à tracer des forces fictives

$$P'_1 = \frac{a_1}{l} \sum_1^n P,$$

$$P'_2 = \frac{a_2}{l} \sum_1^n P,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$P'_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{l} \sum_1^n P,$$

proportionnelles aux distances a_1, a_2, ... des essieux successifs

$$\mu_{ig} = P'_1 \alpha'_1 + P'_2 \alpha'_2 + \ldots + P'_{i-1} \alpha'_{i-1} = \sum_1^{i-1} P'\alpha'.$$

On aurait de même

$$\mu_{id} = \sum_i^n P'(l - \alpha')$$

et, par suite,

$$m_i = \frac{l-x}{l} \sum_1^{i-1} P'\alpha' + \frac{x}{l} \sum_i^n P'(l - \alpha'),$$

équation qui montre (§ 193) que m_i est le moment de flexion dû aux charges P'_i. Donc, pour avoir le polygone cherché :

1° Tracez, comme il est dit ci-dessus, les verticales de ses sommets;

2° Suivant ces verticales, appliquez des forces fictives P'_i proportionnelles aux distances a_i entre les essieux, le facteur de proportionnalité étant le rapport du poids total du convoi à la longueur de la poutre;

3° Tracez un polygone funiculaire de ces forces, de même distance polaire que la parabole et passant par les deux appuis.

Ce sera le polygone cherché.

FIN DE LA QUATRIÈME PARTIE.

INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LES QUATRE VOLUMES.

***Nota.* — Les chiffres romains indiquent les numéros des Volumes ou Parties de l'Ouvrage; les chiffres ordinaires, les numéros des pages. Aux articles : *Définitions, Formules, Notations, Théorèmes, Tables,* on a donné des indications détaillées et de nature à faciliter la tâche du lecteur, quoique beaucoup de ces indications se trouvent déjà dans les autres Parties de la Table.**

A.

B.

C.

D.

E.

F.

G.

H.

I.

J.

K.

L.

M.

N.

O.

P.

R.

S.

T.

V.

W.

FIN DE L'INDEX ALPHABÉTIQUE.

10620 Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

LA

STATIQUE GRAPHIQUE

ET SES

APPLICATIONS AUX CONSTRUCTIONS.

Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

LA

STATIQUE GRAPHIQUE

ET SES

APPLICATIONS AUX CONSTRUCTIONS;

PAR

M. MAURICE LÉVY,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES,
PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE ET A L'ÉCOLE CENTRALE
DES ARTS ET MANUFACTURES.

DEUXIÈME ÉDITION.

IVe PARTIE.

OUVRAGES EN MAÇONNERIE.
SYSTÈMES RÉTICULAIRES A LIGNES SURABONDANTES.
INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES CONTENUES
DANS LES QUATRE PARTIES.

ATLAS.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1888